

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
SEDE QUITO

CARRERA: INGENIERÍA MECÁNICA

Tesis previa a la obtención del título de: INGENIERO MECÁNICO

TEMA:

**MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN DE LA ECUACIÓN
DIFERENCIAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR DE UNA ALETA
RECTANGULAR DE ÁREA CONSTANTE Y LONGITUD “L” CON
SIMULINK**

AUTORES:

JAIME EDUARDO ANDOCILLA LÓPEZ

ADRIÁN ALEJANDRO CARRERA ANDRADE

DIRECTOR:

GALO JAVIER GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

Quito, abril de 2015.

DECLARATORIA DE RESPONSABILIDAD Y AUTORIZACIÓN DE USO DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Nosotros Jaime Eduardo Andocilla López y Adrián Alejandro Carrera Andrade autorizamos a la Universidad Politécnica Salesiana la publicación total o parcial de este trabajo de titulación y su reproducción sin fines de lucro.

Además declaramos que los conceptos y análisis desarrollados y las conclusiones del presente trabajo son de exclusiva responsabilidad de los autores.

Jaime Eduardo Andocilla López
C.I: 0602990632

Adrián Alejandro Carrera Andrade
C.I: 1715007462

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado en su totalidad por Jaime Eduardo Andocilla López y Adrián Alejandro Carrera Andrade, bajo mi supervisión.

Galo Javier González Hernández
DIRECTOR DEL PROYECTO

DEDICATORIA

Dedicamos este proyecto de Tesis.

A toda nuestra familia en especial a nuestros padres por ser nuestra guía y refugio, por habernos enseñado que el éxito va de aquel que no retrocede ante las dificultades y que tras superarlas, el esfuerzo logra el más espléndido de los triunfos...

Adrián y Jaime

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1.....	2
FUNDAMENTOS TEÓRICOS	2
1.1 Termodinámica y transferencia de calor.	2
1.2 Áreas de aplicación de la transferencia de calor.....	2
1.3 Transferencia de calor en la ingeniería.....	3
1.4 Elaboración de los modelos de la transferencia de calor.....	4
1.5 Mecanismos de transferencia de calor.....	4
1.5.1 Conducción.....	5
1.5.2 Convección.....	7
1.5.3 Radiación.....	8
1.6 Generación de calor.....	9
CAPÍTULO 2.....	10
MODELACIÓN MATEMÁTICA.....	10
2.1 Ecuación de la transferencia de calor.	10
2.1.1 Ecuación unidimensional de la conducción de calor.....	10
2.1.2 Modelo matemático de la ecuación de transferencia de calor.....	11
Conducción	11
Convección.....	13
Coeficiente de Transferencia de Calor o Coeficiente de Convección.....	15
2.2 Transferencia de calor en superficies con aletas.....	15
2.2.1 Ecuación de la aleta.....	17
Parámetros para el análisis de las aletas.....	18
Caso A: Aleta con convección en el extremo	19
Caso B: Aleta con extremo adiabático	19
Caso C: Aleta de extremo con temperatura establecida.....	20

CAPÍTULO 3.....	21
SOLUCIÓN NUMÉRICA CON DIFERENCIAS FINITAS Y SISTEMA MATRICIAL.....	21
3.1 Diferencias finitas de ecuaciones diferenciales	21
3.2 Transferencia de calor unidimensional en estado estacionario.	24
3.3 Condiciones de temperatura específica, flujo específico de calor y convección (condiciones de borde).	30
3.4 Modelo experimental de transferencia de calor desde aletas rectangulares.....	33
3.4.1 Elaboración del sistema de ecuaciones.	39
3.4.2 Método experimental usando con Excel.	39
3.5 Método de Crout de factorización de matrices.	44
3.5.1 Análisis para el método de Crout.	46
3.5.2 Desarrollo didáctico del método de Crout.	46
3.5.3 Resolución de las ecuaciones del modelo experimental usando el Método de Crout.....	47
CAPÍTULO 4.....	57
SIMULINK DE MATLAB.....	57
4.1 MATLAB.....	57
4.1.1 ¿Qué es MATLAB?	57
4.1.2 Aplicaciones de MATLAB	58
4.1.3 Aplicación GUIDE de MATLAB	58
4.2 SIMULINK.....	58
4.2.1 ¿Qué es SIMULINK?.....	58
4.2.2 ¿Qué hace SIMULINK?.....	59
4.2.3 ¿Qué son los diagramas de bloques?.....	59
4.3 Configuración de SIMULINK para el ejemplo experimental	60
4.3.1 Procedimiento de simulación en SIMULINK.....	60

CAPÍTULO 5	81
ANÁLISIS DE RESULTADOS	81
5.1 Variación en el intervalo de tiempo.....	82
5.2 Variación de la Temperatura	85
5.3 Variación de sección o área	86
5.4 Variación de la resistencia térmica del material	87
5.5 Variación del coeficiente de transferencia de calor	88
CONCLUSIONES	90
RECOMENDACIONES	92
LISTA DE REFERENCIAS	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Transferencia de Calor.....	2
Figura 1.2 Aplicación de Transferencia de Calor	3
Figura 1.3 Mecanismos de Transferencia de Calor.....	5
Figura 1.4 Conducción	5
Figura 1.5 Convección	7
Figura 1.6 Diagrama de Flujo de Calor por Convección	8
Figura 1.7 Radiación	9
Figura 2.1 Diagrama de Transferencia de Calor	10
Figura 2.2 Conducción de Calor.	12
Figura 2.3 Convección en un Sólido	13
Figura 2.4 Convección en una Superficie	14
Figura 2.5 Conducción, Convección y Radiación en Aletas.....	16
Figura 2.6 Transferencia de Calor en Aletas.....	16
Figura 3.1 Transferencia de Calor en Aletas. La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la función en ese punto	21
Figura 3.2 Transferencia de calor en aletas. Esquema de los nodos y las temperaturas nodales usados en el desarrollo de la formulación en diferencias finitas de la transferencia de calor en una pared plana	22
Figura 3.3 Transferencia de Calor en Aletas. Puntos nodales y elementos de volumen para la formulación en diferencias finitas de la unidimensional en una pared plana	25
Figura 3.4 Transferencia de Calor en Aletas. En la formulación en diferencias finitas que la temperatura varía linealmente entre los nodos.	27
Figura 3.5 Transferencia de Calor hacia afuera del elemento.....	29
Figura 3.6 Transferencia de Calor hacia adentro del elemento.....	29
Figura 3.7 Condiciones de Frontera para Diferencias Finitas.....	30
Figura 3.8 Esquema para formulación de diferencias finitas	31
Figura 3.9 Esquema para el modelo experimental	33
Figura 3.10 Esquema 1 para el modelo experimental	35
Figura 3.11 Esquema 2 para el modelo experimental	37
Figura 3.12 Diagrama para elaborar resolución de sistemas de ecuaciones	39
Figura 3.13 Diagrama de factorización para el Método de Crout.....	45

Figura 4.1 Icono de MATLAB mostrado en el escritorio de una PC	60
Figura 4.2 Comando “simulink” o icono “Simulink Library” para abrir SIMULINK	61
Figura 4.3 “New Model” – Nuevo Modelo para trabajar en SIMULINK	61
Figura 4.4 Asignación de constantes.....	62
Figura 4.5 Asignación de nombres de variables a cada constante	62
Figura 4.6 Asignación de bloque Embedded MATLAB Function	63
Figura 4.7 Ingreso de fórmula en Embedded MATLAB Function	63
Figura 4.8 Ingreso de bloques de integración “Integrator”	64
Figura 4.9 Asignación de parámetros de cada integrador	64
Figura 4.10 Ingreso de bloque “To Workspace”	65
Figura 4.11 Asignación de parámetros del bloque “To Workspace”	65
Figura 4.12 Ingreso de bloque “Clock”	66
Figura 4.13 Asignación de parámetros del bloque “Clock”	66
Figura 4.14 Diagrama de bloques sin conexiones.....	67
Figura 4.15 Diagrama de bloques final	67
Figura 4.16 Nueva Hoja de Cálculo para programación.....	68
Figura 4.17 Muestra de configuración en MATLAB	69
Figura 4.18 Botón de play para correr el programa de SIMULINK.....	70
Figura 4.19 Botón de play para correr el programa de MATLAB.....	70
Figura 4.20 Ingreso del valor del coeficiente de transferencia de calor (h)	71
Figura 4.21 Ingreso del valor del perímetro (p)	71
Figura 4.22 Ingreso del valor del área (A)	71
Figura 4.23 Ingreso del valor de la resistencia térmica del material (k)	72
Figura 4.24 Curva de la transferencia de calor general para una aleta desde MATLAB.....	72
Figura 4.25 Curva de la transferencia de calor general de la aleta en MATLAB.....	73
Figura 4.26 Submenú “Commonly Used Blocks” donde se encuentra el bloque “Constant”	74
Figura 4.27 Selección del bloque “Constant”	74
Figura 4.28 Submenú “Math Operations” donde se encuentra el bloque “Product” .	75
Figura 4.29 Selección del bloque “Product”	76
Figura 4.30 Submenú “User-Defined Functions” donde se encuentra el bloque “Embedded MATLAB Function”	76

Figura 4.31 Selección del bloque “Embedded MATLAB Function”	77
Figura 4.32 Ingreso del bloque “To Workspace”	78
Figura 4.33 Diagrama de bloques en SIMULINK	78
Figura 4.34 Correr programa para obtener la simulación	80
Figura 4.35 Curva Temperatura vs Tiempo de la simulación de transferencia de calor de una aleta rectangular de área constante y longitud “L”	80
Figura 5. 1 Curva de pérdida de calor de una aleta en función a los valores experimentales.....	81
Figura 5. 2 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0 a 0.2.....	82
Figura 5. 3 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 1.2 a 1.8	83
Figura 5. 4 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0.2 a 0.2	84
Figura 5. 5 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0 a 5.....	84
Figura 5. 6 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0 a 10.....	85
Figura 5. 7 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación de temperatura	86
Figura 5. 8 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación de sección o área	87
Figura 5. 9 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación de la resistencia térmica del material.....	88
Figura 5. 10 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación del coeficiente de transferencia de calor.....	89

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Matriz del sistema de ecuaciones	39
Tabla 3.2 Matriz A	40
Tabla 3.3 Vector \vec{b}	40
Tabla 3.4 Matriz inversa de A.....	40
Tabla 3.5 Sistema $\vec{x} = A\vec{b}$	41
Tabla 3.6 Resultado vector \vec{x}	41
Tabla 3.7 Comprobación multiplicando la matriz A por la vector \vec{x}	42
Tabla 3.8 Resultado del vector \vec{b} en función a la multiplicación de la Tabla 3.7	42
Tabla 3.9 Nomenclatura de la matriz A para la factorización LU	44
Tabla 3.10 Nomenclatura factorización A=LU.....	44
Tabla 3.11 Sistema matricial 3x3 de ecuaciones lineales	46
Tabla 3.12 Nomenclatura factorización LU para un sistema 3x3.....	46
Tabla 3.13 Sistema matricial para la solución experimental mediante el método de Crout.....	48
Tabla 3.14 Nomenclatura del sistema matricial 5x5 para el Método de Crout.....	48
Tabla 3.15 Reemplazo de la matriz A para la factorización LU	48
Tabla 3.16 Valores de L y U después de la factorización	52
Tabla 3.17 Matrices L y U	52
Tabla 3.18 Nomenclatura para $L\vec{y} = \vec{b}$	53
Tabla 3.19 Multiplicación para $L\vec{y} = \vec{b}$	53
Tabla 3.20 Resultados de vector \vec{y}	54
Tabla 3.21 Nomenclatura para $U\vec{x} = \vec{y}$	54
Tabla 3.22 Multiplicación $U\vec{x} = \vec{y}$	54
Tabla 3.23 Valores de Temperaturas usando Método de Crout.....	55

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO 1.....	95
COMANDO GUIDE.....	95
ANEXO 2.....	106
BLOQUES DE SIMULINK PARA EL DIAGRAMA DE BLOQUES	106
ANEXO 3.....	109
PROPIEDADES DE MATERIALES.....	109

RESUMEN

Conocer los principios básicos de la disipación de calor que pueden ser encontrados en motores eléctricos, radiadores, computadoras, refrigeradoras, intercambiadores de calor, entre otras, es una de las áreas de estudio de la transferencia de calor, que usa aletas o superficies extendidas para cumplir el proceso de la transferencia.

El análisis de este fenómeno aplicando la ecuación general de la transferencia de calor (mencionada en diferentes libros y manuales que estudian aletas rectangulares en procesos de transferencia de calor) para superficies extendidas rectangulares de área constante y longitud “L” genera una interrogante ¿Es posible modelar tal ecuación en diferentes ecuaciones parciales para tener un modelo matemático que nos ayude al análisis, evaluación y programación de un sistema de bloques a ser computarizado en SIMULINK y MATLAB?

El estudio utiliza diferencias finitas que surgen de la ecuación diferencial de transferencia de calor para aletas rectangulares y muestra cómo el programa de MATLAB trabaja internamente en su hoja de cálculo. También estas diferencias finitas serán utilizadas para obtener un sistema de ecuaciones que sirve para el análisis teórico de la transferencia de calor en superficies extendidas y posteriormente en la respectiva comparación de resultados y curvas.

Es necesario indicar que la investigación es unidimensional y toma en cuenta una aleta rectangular de superficie constante y longitud “L” aplicable a cualquier tipo de material.

Las curvas a ser graficadas y evaluadas serán mediante el software de MATLAB y su aplicación de SIMULINK, y son presentadas para una mejor visualización usando el comando GUIDE de MATLAB.

ABSTRACT

Learn the basic principles of heat dissipation to be found in electric motors, heaters, computers, refrigerators, heat exchangers, etc., it is an area of study of the heat transfer, using fins or extended surfaces to comply with the process of transfer.

The analysis of this phenomenal using the general equation of the heat transfer (which is mentioned in different books and manuals study rectangular fins in the heat transfer process) for rectangular extended surfaces of constant section and length “L” produces the following question ¿Is it possible modeling this equation in different partial equations to get a mathematic model for the analysis, evaluation and programming of a block system to be computerized in SIMULINK and MATLAB?

The study shall use finite differences based on differential equation of heat transfer for rectangular fins to show how the program of MATLAB works internally in its spread sheet. Also these finite differences will be used to get a system equations that will help in the theoretical analysis of heat transfer in extended surfaces and after for the respective comparison of results and curves.

It is necessary indicating that the investigation is one-dimensional and takes into consideration a rectangular fin of constant section and length “L” applicable to any kind of material.

The curves to be plotted and evaluated will be given by MATLAB and SIMULINK, and for a better performance these shall be shown using the command GUIDE of MATLAB.

SIMBOLOGÍA

\dot{Q} : Calor

$\dot{Q}_{conducción}$: Calor de conducción

k : conductividad térmica (constante de proporcionalidad)

T_1 : Temperatura 1

T_2 : Temperatura 2

A : Área

Δx : Delta x (variación de longitud)

ΔT : Delta T (variación de temperatura)

$\dot{Q}_{convección}$: Calor de convección

h : Coeficiente de transferencia de calor por convección

T_s : Temperatura superficial

T_∞ : Temperatura del fluido suficientemente alejado de una superficie

\dot{E}_{gen} ó \dot{g} : Generación de calor o generación de energía térmica

dV : Diferencial de volumen

q : Cambio de calor por unidad de tiempo

M : Nodos o regiones

$m - 1, m, m + 1$: Subdivisión de regiones

dQ : Diferencial de calor

d_T : Diferencial de tiempo

dx : Diferencial de longitud en la coordenada x

dy : Diferencial de longitud en la coordenada y

dz : Diferencial de longitud en la coordenada z

L : Longitud de la aleta.

Q : Transferencia de calor o calor.

A_c : Área constante.

p : Perímetro.

T_s : Temperatura de la aleta.

T_∞ : Temperatura ambiente.

h : Coeficiente de transferencia de calor.

K : Resistencia térmica del material.

$\frac{dT}{dx}$: Gradiente de temperatura

A, L, U : Matrices

L^{-1} : Matriz inversa

a_{21} : Elemento de una matriz

$A = LU$: Sistema de matrices

GLOSARIO

Adimensional:	Dícese de cualquier constante o función que no tiene dimensiones.
Aislamiento:	Sistema que impide la transmisión de fenómenos físicos.
Aletas:	(Refrigeración) de pequeño espesor y gran superficie, se practican en las partes del motor o de la transmisión sometidas a calentamientos fuertes y que deben disipar cantidades considerables de calor.
Análisis:	Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos.
Átomos:	Cantidad menor de un elemento químico que tiene existencia propia y se considera indivisible.
Balance de energía:	Nombre alternativo para los modelos termodinámicos.
Cálculo:	Cómputo, cuenta o investigación que se hace de algo por medio de operaciones matemáticas.
Caldera:	Es una máquina o dispositivo de ingeniería diseñado para generar vapor.
Calefacción:	forma de climatización que consiste en aportar calor a los espacios cerrados y habitados, cuando las temperaturas exteriores son bajas
Calentadores:	Dispositivo termodinámico que utiliza energía para elevar la temperatura.
Calor:	Es una cantidad de energía y es una expresión del movimiento de las moléculas que componen un cuerpo.
Capa límite:	Es la zona donde el movimiento de un fluido es perturbado por la presencia de un sólido con el que está en contacto.
Coeficiente:	Es un factor multiplicativo.
Número de Nusselt:	Número adimensional que mide el aumento de la transmisión de calor desde una superficie por la que un fluido discurre (transferencia de calor por convección) comparada con la transferencia de calor si ésta ocurriera solamente por conducción.

Número de Prandtl:	Número adimensional proporcional al cociente entre la difusividad de momento (viscosidad) y la difusividad térmica. Se llama así en honor a Ludwig Prandtl.
Número de Reynolds:	Número adimensional utilizado en mecánica de fluidos, diseño de reactores y fenómenos de transporte para caracterizar el movimiento de un fluido.
Colisión:	Choque físico o mecánico que es percibido por una repentina aceleración o desaceleración causada normalmente por un impacto.
Condensador térmico:	Es un intercambiador de calor entre fluidos, de modo que mientras uno de ellos se enfría, pasando de estado gaseoso a estado líquido, el otro se calienta.
Conducción:	Es un proceso de transmisión de calor basado en el contacto directo entre los cuerpos, sin intercambio de materia.
Conductividad Térmica:	Propiedad de los materiales que mide la capacidad de conducción de calor.
Constante:	Valor fijo; valor para el cálculo de operaciones físicas.
Convección:	Forma de transferencia de calor y se caracteriza porque se produce por medio de un fluido (líquido o gas) que transporta el calor entre zonas con diferentes temperaturas.
Densidad:	Magnitud escalar referida a la cantidad de masa en un determinado volumen de una sustancia.
Derivada:	De una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en un cierto intervalo.
Diagrama:	Dibujo geométrico, utilizado en ciencia; con el que se obtiene la representación gráfica de la resolución de un problema, de las relaciones entre las diferentes partes o elementos de un conjunto o sistema.

Difusión:	Es un proceso de movimiento molecular.
Ecuación:	Es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.
Ecuación diferencial:	Es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva.
Electromagnetismo:	Es una rama de la física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría.
Electrones:	Es una partícula subatómica con una carga eléctrica elemental negativa.
Energía:	Se define como la capacidad para realizar un trabajo.
Equilibrio mecánico:	Cuando la suma de fuerzas y momentos sobre todas y cada una de las partes del cuerpo se anulan.
Equilibrio termodinámico:	Situación que se da en un sistema físico (es decir, un sistema al que podemos atribuir una energía interna) cuando todos los factores exteriores y/o procesos internos no producen cambios de presión, temperatura u otras variables macroscópicas.
Estado estacionario:	Sistema físico que conserva características del mismo no varían con el tiempo.
Flujo:	Es la cantidad de masa de un líquido que fluye a través de una tubería en un segundo.
Generación:	División de partículas elementales.
Generador:	Máquina que convierte la energía mecánica en eléctrica.
Gradiente:	Es un vector que se encuentra normal (perpendicular) a la curva de nivel en el punto que se está estudiando, llámese (x,y) , (x,y,z) , (tiempo, temperatura), etcétera.
Intercambiadores:	Dispositivo diseñado para transferir calor entre dos medios, que estén separados por una barrera o que se encuentren en contacto. Son parte esencial de los dispositivos de calefacción, refrigeración,

acondicionamiento de aire, producción de energía y procesamiento químico.

Isotrópico:	Que tiene propiedades que son idénticas en todas direcciones.
Ley de Fourier:	Que establece que el flujo de transferencia de calor por conducción en un medio isótropo es proporcional y de sentido contrario al gradiente de temperatura en esa dirección.
Ley de Newton (Enfriamiento):	Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido en la unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo por conducción, convección y radiación es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio externo.
MatLab:	(Abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M) y servicio de especie.
Matriz:	Ordenación rectangular de elementos algebraicos que pueden sumarse y multiplicarse de varias maneras.
Modelo:	Representación abstracta, conceptual, gráfica (o visual), física o matemática, de fenómenos, sistemas o procesos a fin de analizarlos, describirlos, explicarlos, simularlos y predecirlos.
Parámetro:	Es una constante o una variable que aparece en una expresión matemática y cuyos distintos valores dan lugar a distintos casos en un problema.
Partículas:	La mayor porción de materia de un cuerpo que conserva sus propiedades químicas.
Proceso:	Conjunto de actividades mutuamente relacionadas o que al interactuar transforman elementos de entrada y los convierten en resultados.

Prototipo:	Objeto que se usa como un estándar de medida de alguna magnitud física contra la que medir sus cantidades físicas.
Radiación:	Consiste en la propagación de energía en forma de ondas electromagnéticas o partículas subatómicas a través del vacío o de un medio material.
Radiadores:	Se conoce por radiador al dispositivo que permite intercambiar calor entre dos medios. Sirve para disipar calor de un objeto o aparato para evitar su sobrecalentamiento o para calentar un espacio o un objeto.
Serie de Taylor:	Representación de una función como una infinita suma de términos.
SIMULINK:	Entorno de programación visual, que funciona sobre el entorno de programación MATLAB. Es un entorno de programación de más alto nivel de abstracción que el lenguaje interpretado MATLAB.
Temperatura:	La temperatura es la medida del calor de un cuerpo (y no la cantidad de calor que este contiene o puede rendir).
Termodinámica:	Rama de la física que describe los estados de equilibrio a nivel macroscópico.
Transferencia de calor:	Es el paso de energía térmica desde un cuerpo de mayor temperatura a otro de menor temperatura.
Variable:	Es un símbolo que puede ser remplazado o que toma un valor numérico en una ecuación o expresión matemática en general.

INTRODUCCIÓN

La transferencia de calor está presente en casi todos los procesos industriales y fenómenos naturales, lo que nos lleva a realizar una investigación de los aspectos básicos involucrados en el intercambio de calor.

Desde la aparición de las herramientas informáticas dentro de la ingeniería se han creado diferentes tipos de software para facilitar la investigación, estudio y análisis de los fenómenos inmersos dentro de la industria, disminuyendo así el tiempo de resolución e interpretación de resultados. Una de estas herramientas informáticas para analizar y simular la transferencia de calor de cualquier índole es SIMULINK de MATLAB, que configurado y programado con diferencias finitas y métodos de evaluación dan paso a un software que ayuda de gran manera a la visualización y entendimiento de datos obtenidos.

CAPÍTULO 1

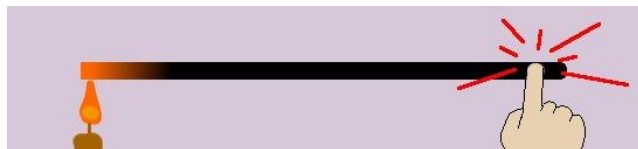
FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La termodinámica trata de la cantidad de transferencia de calor a medida que un sistema pasa por un proceso de un estado de equilibrio a otro y no hace referencia a cuanto durara ese proceso. En general el interés está en la rapidez o razón de esa transferencia, la cual constituye el tema de la ciencia de la transferencia de calor. (Cengel, 2004, p.2)

1.1 Termodinámica y transferencia de calor.

El calor es el resultado de la energía que se puede transferir de un sistema a otro como resultado de la diferencia de temperaturas hasta lograr un estado estacionario (ver Figura 1.1); y a esta forma de energía y sus razones de dicha transferencia se la llama Transferencia de Calor. (Incropera & De Witt, 2000, p.20)

Figura 1.1 Transferencia de Calor



Fuente: Incropera & De Witt, 2000, p.20

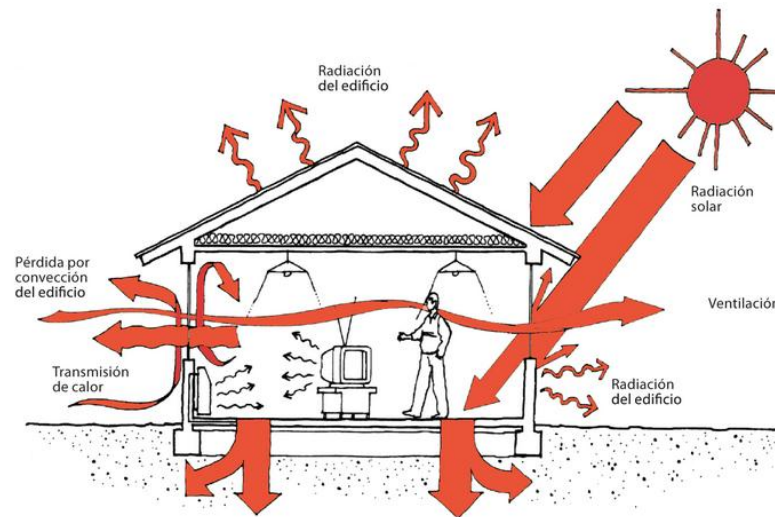
1.2 Áreas de aplicación de la transferencia de calor.

En el diario vivir es muy común encontrar casos de transferencia de calor, un ejemplo es el cuerpo humano, este transmite calor hacia el exterior, y como controlador de esa transferencia es la vestimenta que usa el ser humano.

En el área de la ingeniería, existen muchas aplicaciones: los sistemas de calefacción, de aire acondicionado, el sistema de ventilación y

radiadores de los vehículos, plantas generadoras de electricidad, los aparatos electrónicos como computadoras, radios, televisiones, entre otros. (ver Figura 1.2), todos estos necesitan de un estudio adecuado de transferencia de calor, para que tengan un aislamiento apropiado para disminuir o aumentar la pérdida de calor, todo basado en un cálculo matemático correcto. (Cengel, 2004, p.5)

Figura 1.2 Aplicación de Transferencia de Calor



Fuente: Incropera & De Witt, 2000, p.40

1.3 Transferencia de calor en la ingeniería.

Los equipos de transferencia de calor como los intercambiadores de calor, las calderas, los condensadores, los radiadores, los calentadores, los hornos, los refrigeradores, etc., son diseñados teniendo en cuenta el análisis de la transferencia de calor.

Existen dos tipos de ámbitos a ser estudiados en este caso, primero se tiene los problemas de capacidad nominal, que se refieren a la obtención de la razón de la transferencia de calor con una diferencia específica de temperatura, y el segundo tipo son los de dimensionamiento, los cuales tratan de la determinación del tamaño de un sistema con el propósito de encontrar una razón que determine una diferencia específica de temperatura.

A partir de esto se considera que la transferencia de calor puede ser estudiada de una forma experimental (prototipo para tomar pruebas que serán interpretadas y también de una forma analítica (elaboración y análisis de cálculos). (Cengel, 2004, p.5)

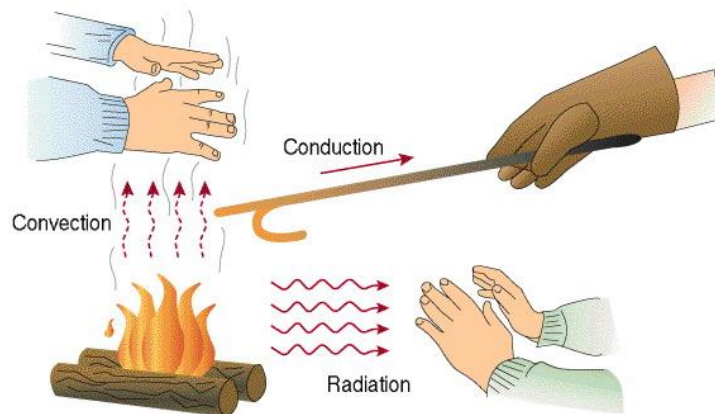
1.4 Elaboración de los modelos de la transferencia de calor.

Los modelos de transferencia de calor y los procesos de transferencia tiene ciertas condiciones propias y otras que siempre serán base y muy similares en cada proceso, es decir, que se debe tomar en cuenta para un modelo de transferencia de calor las condiciones reales, dimensiones y características de uso, a partir de esto se moldea la función y como estará diseñado el sistema de transferencia de calor a ser creado, estudiado y analizado, el cual cumplirá con todos los aspectos mencionados, muchos procesos ocurren de manera aleatoria pero son gobernados por leyes físicas visibles o no tan visibles, lo que significa que siempre el comportamiento de la transferencia de calor está basado en leyes ya establecidas, que han sido previamente estudiadas científicamente.

1.5 Mecanismos de transferencia de calor.

El estudio matemático se dedica a resolver o determinar la cantidad de transferencia de calor en relación al proceso al que es sometido un sistema de un estado de equilibrio a otro estado de equilibrio, pero el área de estudio que se dedica a la investigación de las razones por las cuales existen esas transferencias de energía se llama transferencia de calor; el calor puede ser transferido mediante tres métodos; conducción, convección y radiación. (Ver Figura 1.3)

Figura 1.3 Mecanismos de Transferencia de Calor



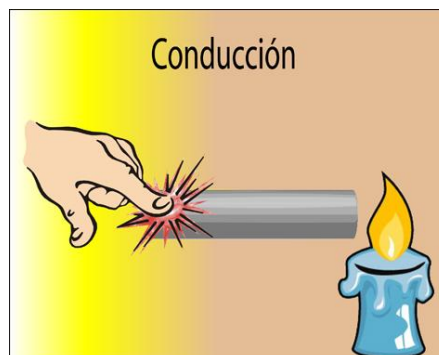
Fuente: Rosenow & Hartnett, 1981, p.18

Todos estos tres métodos necesitan principalmente una diferencia en la temperatura, donde los procesos siempre irán de la mayor temperatura a la menor temperatura hasta alcanzar un estado de equilibrio. (Cengel, 2004, p.17)

1.5.1 Conducción.

Se conoce como método de conducción a la transferencia de partículas más energéticas hacia las adyacentes menos energéticas (ver Figura 1.3 y Figura 1.4), y esto es el resultado de la interacción entre esas partículas.

Figura 1.4 Conducción



Fuente: Holman, 1999, p.18

La conducción puede suceder en líquidos, sólidos o gases. En los cuerpos gaseosos y líquidos la conducción es producida por colisiones y difusión de las moléculas, esto durante su movimiento aleatorio. En los cuerpos sólidos se produce gracias a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una retícula y al transporte de energía que está a cargo de los electrones libres. (Incropera & De Witt, 2000, p.20)

Cuando se menciona la transferencia de calor, también se hace referencia a un tiempo, razón o velocidad en que ocurre este fenómeno, es decir, que una transferencia de calor está basada en la duración del mismo, lo cual involucra varios aspectos, pero sobre todo se ve influenciada por la geometría y las características de los materiales expuestos a la transferencia de calor. (Cengel, 2004, p.17)

En base a la geometría se dice que, mientras más gruesa es la pared, aumenta la razón de transferencia de calor, ya que existe mayor resistencia al fenómeno, pero si existe un área de contacto muy grande, esta razón de transferencia tiende a aumentar. (Kreith & Bohn, 2002, p.25)

Entonces, se tiene la ecuación de transferencia de calor, considerando los aspectos geométricos y las características del material ante un flujo de calor (Cengel, 2004, p.18):

$$\dot{Q}_{\text{conducción}} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{Ecuación 1-1}$$

donde la constante de proporcionalidad k es la conductividad térmica del material, la cual es la medida de conductividad propia de un material; por tal razón la forma diferencial será (Cengel, 2004, p.18):

$$\dot{Q}_{\text{conducción}} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{Ecuación 1-2}$$

$$\dot{Q}_{\text{conducción}} = -kA \frac{dT}{dx} \quad \text{Ecuación 1-3}$$

A la Ecuación 1-3 se la conoce como la Ley de Fourier de la conducción de calor, esto en honor a J. Fourier quien la expuso por primera vez en su texto sobre transferencia de calor en 1822.

La razón $\frac{dT}{dx}$ es la gradiente de temperatura, la cual es la pendiente de la curva en un diagrama $T - x$. (Cengel, 2004, p.18)

1.5.2 Convección.

Es la forma de transferir la energía de una superficie sólida y el líquido o gas adyacente (ver Figura 1.3 y Figura 1.5), el cual está en movimiento y comprende los efectos combinados de la conducción y el movimiento de los fluidos. Por ende entre más rápido es el movimiento de un fluido, mayor es la transferencia de calor por convección. Cuando existe movimiento de un fluido adyacente se habla de una conducción pura, mas no de una convección. Al existir un exceso de movimiento, es verdad que se tiene mayor transferencia de calor, pero esto implica que se dificulte de gran manera el cálculo de la razón de transferencia, ya que este es demasiado rápido e incontrolable.

Figura 1.5 Convección



Fuente: Holman, 1999, p.26

A pesar de la complejidad de la convección, se observa que la rapidez de la transferencia de calor por convección es proporcional a la diferencia de temperatura y se expresa para mejor entendimiento con la ley de Newton acerca del enfriamiento:

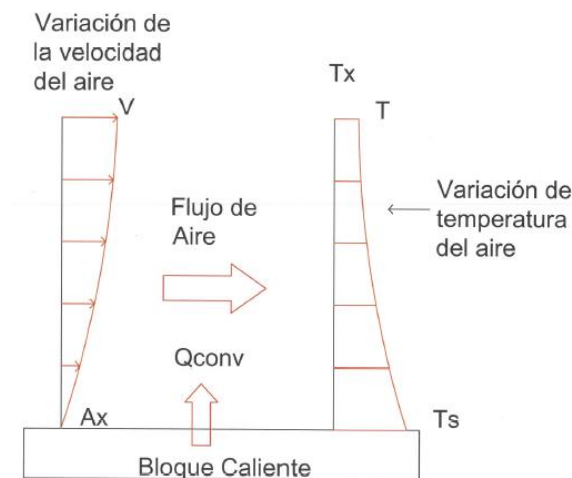
$$\dot{Q}_{convección} = hA_s (T_s - T_{\infty})$$

Ecuación 1-4

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección, A_s es el área superficial a través donde ocurre la transferencia de calor por convección, T_s es la temperatura de la superficie y T_{∞} es la temperatura del fluido suficientemente alejado de esta superficie. (Figura 1.6)

Es muy importante saber que el coeficiente de transferencia de calor por convección h no es una propiedad del fluido, este es un parámetro determinado en forma experimental y que su valor depende de otras variables que son influyentes en la convección, entonces estas variables serán la geometría, la naturaleza del movimiento del fluido, la propiedades y la velocidad masiva del mismo. (Cengel, 2004, p.25)

Figura 1.6 Diagrama de Flujo de Calor por Convección



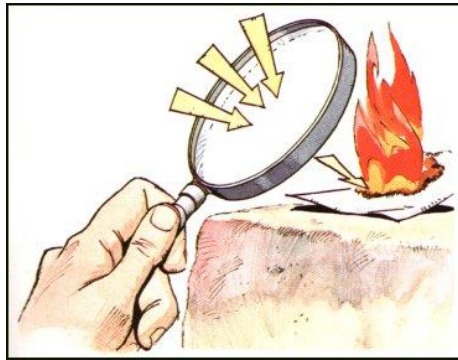
Elaborado por: Jaime Andocilla y Adrián Carrera

1.5.3 Radiación.

Se dice que la radiación es la energía emitida por el material en forma de ondas electromagnéticas, esto como resultado de los cambios de las configuraciones electromagnéticas de átomos o moléculas (ver Figura 1.3 y Figura 1.7).

En los estudios de transferencia de calor es de interés la radiación térmica, esta es la forma de radiación emitida por los cuerpos debido a su temperatura. Teniendo en cuenta que todos los cuerpos que tienen su temperatura sobre el cero absoluto, emiten radiación térmica.

Figura 1.7 Radiación



Fuente: Kern D., 1999, p.43

1.6 Generación de calor.

En un medio a través del cual se transfiere calor puede tenerse la conversión de energía mecánica, eléctrica, nuclear o química en calor. En el análisis de la conducción de calor, estos procesos de conversión son caracterizados como generación de calor o generación de energía térmica.

La razón de generación de calor en un medio puede variar con el tiempo y con la posición. Cuando se conoce la variación en la generación de calor con la posición, la razón total de esa generación en un medio de volumen V se puede determinar con la siguiente ecuación (Cengel, 2004, p.30):

$$\dot{E}_{gen} = \int_v \dot{e}_{gen} dV \quad \text{Ecuación 1-5}$$

CAPÍTULO 2

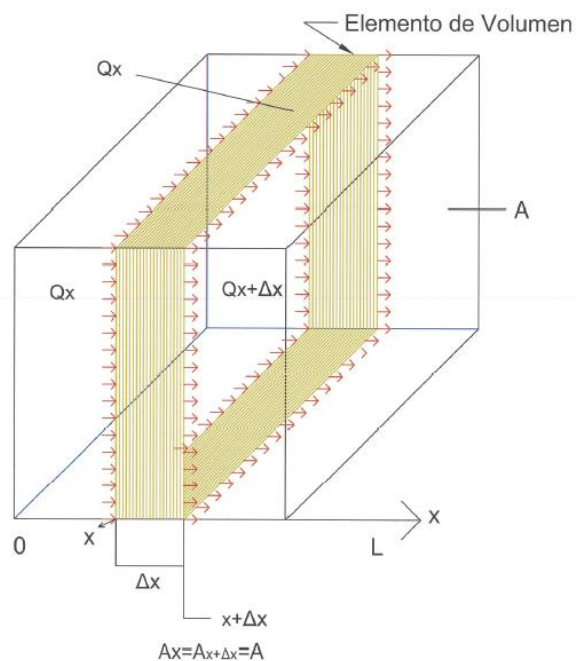
MODELACIÓN MATEMÁTICA.

2.1 Ecuación de la transferencia de calor.

2.1.1 Ecuación unidimensional de la conducción de calor.

Considere la conducción de calor a través de una pared plana grande como la de una casa, el vidrio de una ventana de una sola hoja, la placa metálica de la base de una plancha, un tubo para vapor de agua de hierro fundido, un elemento cilíndrico de combustible nuclear, una resistencia eléctrica de alambre, la pared de un recipiente esférico o una bola metálica que está siendo revenida, etc. (Ver Figura 2.1)

Figura 2.1 Diagrama de Transferencia de Calor



Elaborado por: Jaime Andocilla y Adrián Carrera

La conducción de calor en estas y muchas otras configuraciones geométricas se puede considerar unidimensional ya que la conducción a través de ellas será dominante en una dirección y despreciable en las otras.

2.1.2 Modelo matemático de la ecuación de transferencia de calor.

Conducción

Partiendo de la Ley de Fourier se tiene la siguiente proporcionalidad:

$$q = \frac{dQ}{d_T} = -kA \frac{dt}{dx} \quad [Btu/h] \quad \text{Ecuación 2-1}$$

donde q es el cambio de calor por unidad de tiempo, Q es el cambio de calor, T es el tiempo y k es la conductividad térmica que es equivalente a:

$$k \equiv -\frac{dQ/d_T}{A dt/dx} \quad \text{Ecuación 2-2}$$

La ecuación para la conducción de calor puede ser derivada por la consideración de un incremento de volumen en un medio estacionario isotrópico. El incremento de volumen en un cubo teniendo dimensiones dx, dy, dz como se muestra en la Figura 2.2 y obteniendo una conductividad térmica y calor específico cuyos valores están en función de ambas posiciones y temperaturas. En cualquiera de las direcciones de las coordenadas el flujo de calor esta dada por la Ecuación 1-2. Dentro del campo de flujo de calor en la dirección x es representado por:

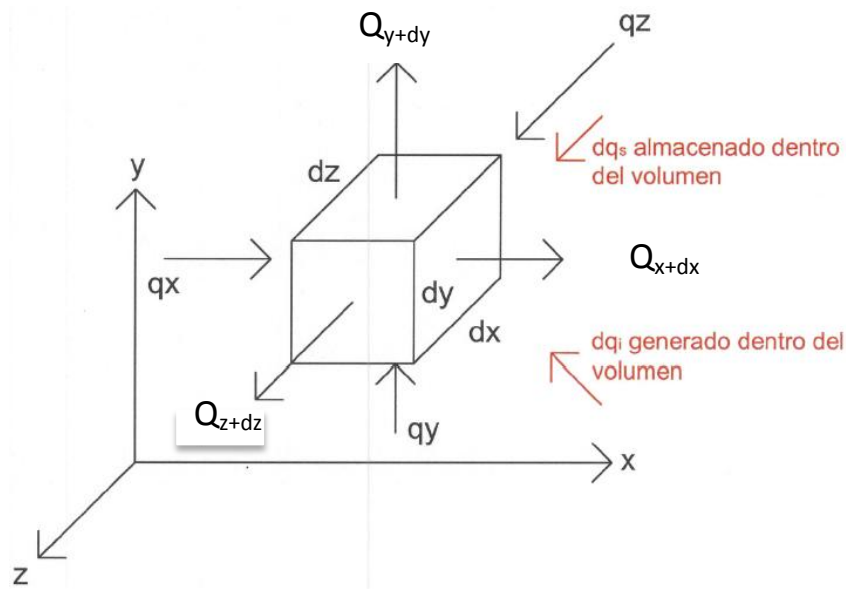
$$\begin{aligned} dQ_x - dQ_{x+dx} &= -k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial x} dydzd_T \\ &\quad - \left\{ -k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] dx \right\} dydzd_T \\ dQ_x - dQ_{x+dx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial x} \right] dx dydzd_T \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-3}$$

De manera similar para las direcciones y, z:

$$\begin{aligned}
 dQ_y - dQ_{y+dy} &= -k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial y} dx dz d\tau \\
 &\quad - \left\{ -k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[-k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial y} \right] dy \right\} dx dz d\tau \\
 dQ_y - dQ_{y+dy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial y} \right] dx dy dz d\tau
 \end{aligned}
 \tag{Ecuación 2-4}$$

$$\begin{aligned}
 dQ_z - dQ_{z+dz} &= -k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial z} dx dy d\tau \\
 &\quad - \left\{ -k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[-k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial z} \right] dz \right\} dx dy d\tau \\
 dQ_z - dQ_{z+dz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[k(x, y, z, t) \frac{\partial t}{\partial z} \right] dx dy dz d\tau
 \end{aligned}
 \tag{Ecuación 2-5}$$

Figura 2.2 Conducción de Calor.



Elaborado por: Jaime Andocilla y Adrián Carrera

Convección

La transferencia de calor por convección se sustenta tanto en el movimiento molecular aleatorio como el movimiento volumétrico del fluido en la capa límite. Partiendo de este concepto se tiene dos tipos de convecciones.

***Convección forzada:** cuando el flujo es causado por medios externos.

***Convección libre o natural:** es flujo es inducido por fuerzas de empuje que surgen a partir de diferencias de densidad ocasionadas por variaciones de temperatura en el fluido.

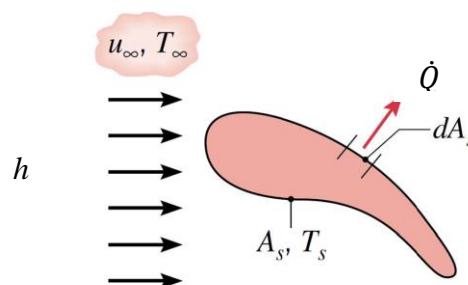
Sin importar la naturaleza particular del proceso de transferencia de calor por convección la ecuación según la ley de enfriamiento de Newton sería:

$$\dot{Q}_{convección} = hA_s (T_s - T_{\infty}); \quad \text{Ecuación 2-6}$$

donde h ($\text{W}/\text{m}^2\text{k}$) es el coeficiente de calor por convección. Este coeficiente depende de las condiciones en la capa límite, en las que influyen la geometría de la superficie, la naturaleza de movimiento del fluido y una variedad de las propiedades termodinámicas del fluido y de transporte.

Entonces se llega a saber que el estudio de la convección se reduce a determinar h .

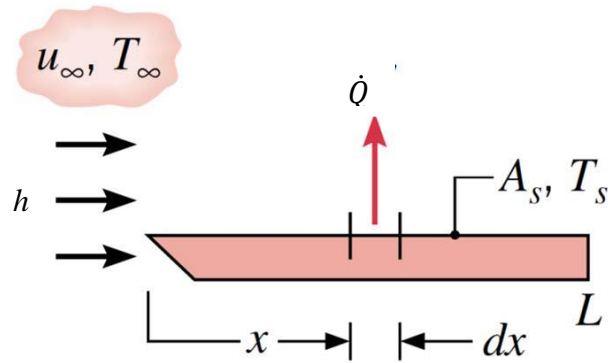
Figura 2.3 Convección en un Sólido



Fuente: Rosenow & Harnett, 1981, p.43)

El h de esta ecuación es local. Como las condiciones de flujo varían de punto a punto sobre la superficie (ver Figura 2.3), \dot{Q} y h también a lo largo de la superficie.

Figura 2.4 Convección en una Superficie



Fuente: Rosenow & Harnett, 1981, p.44

La transferencia total de calor q se obtiene integrando el flujo local sobre toda la superficie (ver Figura 2.4), es decir:

$$\dot{Q}_{convección} = \int_{A_T} q^n dA_s = (T_s - T_\infty) \int_{A_s} h dA_s$$

Se define un coeficiente de convección promedio para toda la superficie:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s$$

De modo que:

$$\dot{Q}_{convección} = h A_s (T_s - T_\infty);$$

Ecuación 2-7

Coeficiente de Transferencia de Calor o Coeficiente de Convección

Para el cálculo de los coeficientes de convección es necesario establecer su relación con números adimensionales tales como: Reynolds, Nusselt, Prandtl. Su forma general se puede expresar por la siguiente relación:

$$h = \frac{c \cdot Re^n \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot k}{L_c} \quad \text{Ecuación 2-8}$$

donde los valores c y n son coeficientes que dependen del tipo de flujo y son definidos de forma experimental.

2.2 Transferencia de calor en superficies con aletas.

Al hablar de superficie extendida o aleta, se hace referencia a un sólido que experimenta transferencia de energía por conducción dentro de sus límites, así como transferencia de energía por convección entre sus límites y sus alrededores, en ciertos casos se tomaría en cuenta la radiación (ver Figura 2.5). La aplicación más frecuente es aquella en la que se usa una superficie extendida o aleta de manera específica para aumentar la rapidez de transferencia de calor entre un sólido y un fluido contiguo. Las aletas se usan cuando el coeficiente de transferencia de calor por convección h es pequeño.

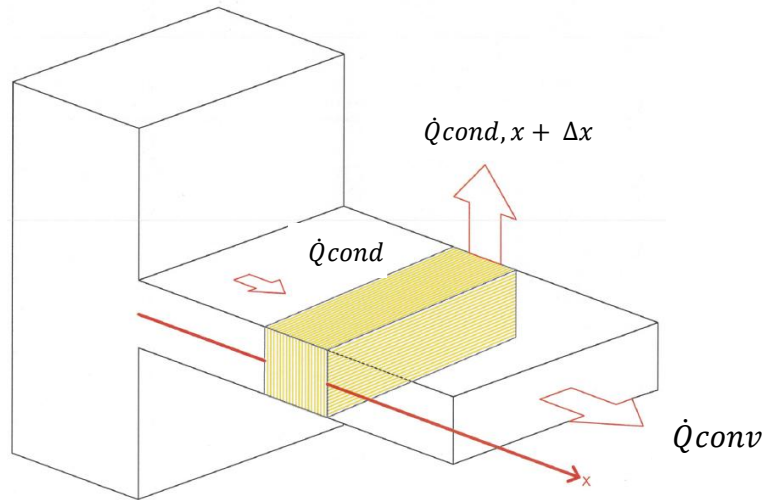
La razón de transferencia de calor desde una superficie está a una temperatura T_s hacia el medio circundante que está a T_∞ se expresa por la ley del enfriamiento como la ecuación expuesta anteriormente (Cengel, 2004, p.174):

$$\dot{Q}_{convección} = hA_s (T_s - T_\infty); \quad \text{Ecuación 2-9}$$

Existen dos maneras de aumentar la razón de transferencia de calor: aumentar el coeficiente de transferencia de calor por convección, h , o aumentar el área superficial A_s . El aumento de h puede requerir la instalación de una bomba o ventilador, o

reemplazar el existente con una más grande, pero esto puede resultar muy poco práctico.

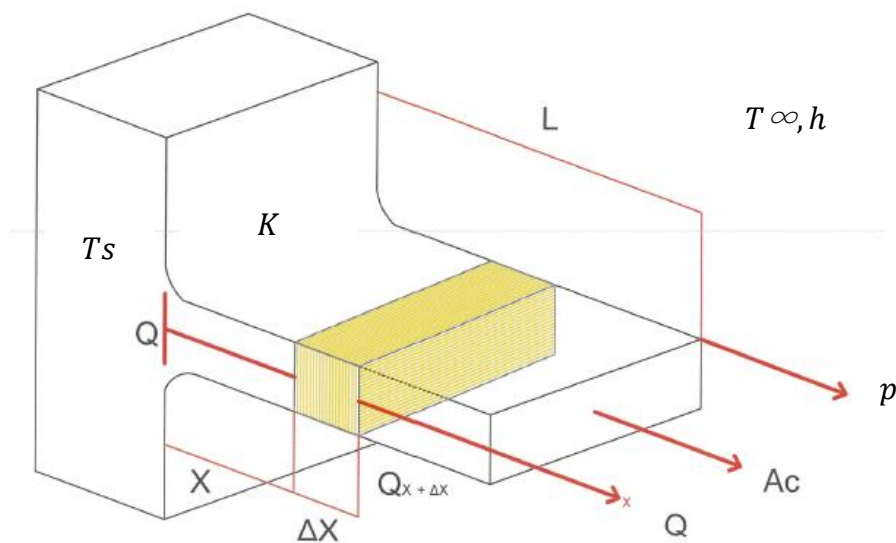
Figura 2.5 Conducción, Convección y Radiación en Aletas



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

La mejor alternativa es aumentar el área superficial al agregar superficies extendidas llamadas aletas (Figura 2.5). Las superficies con aletas se fabrican al extruir, soldar o envolver una delgada lámina metálica sobre una superficie. Las aletas mejoran la transferencia de calor desde una superficie al exponer un área más grande a la convección y la radiación. (Holman, 1999, p.46)

Figura 2.6 Transferencia de Calor en Aletas



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

Se define la nomenclatura de la siguiente forma:

L : Longitud de la Aleta.

Q : Transferencia de Calor o Calor.

A_c : Área Constante.

p : Perímetro.

T_s : Temperatura de la Aleta.

T_∞ : Temperatura Ambiente.

h : Coeficiente de Transferencia de Calor.

K : Resistencia Térmica del Material.

2.2.1 Ecuación de la aleta.

Si se considera un elemento de volumen en una aleta, en la ubicación x , que tiene longitud Δx , un área de sección transversal constante (A_c) y un perímetro de p (ver Figura 2.6). En condiciones estacionarias, el balance de energía sobre este elemento de volumen se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & (\text{Razón de la conducción del calor hacia el elemento en } x) \\ & = (\text{Razón de la conducción del calor desde el elemento en } x + \Delta x) \\ & + (\text{Razón de la convección del calor desde el elemento}), \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-10}$$

o sea;

$$\dot{Q}_{cond, x} = (\dot{Q}_{cond, x + \Delta x}) + \dot{Q}_{conv} \quad \text{Ecuación 2-11}$$

al considerar la Ecuación 1-4 y la nueva ecuación;

$$\dot{Q}_{conv} = h(p \Delta X)(T - T_\infty) \quad \text{Ecuación 2-12}$$

al sustituir y dividir entre $\Delta X \rightarrow 0$ se tiene;

$$\frac{d\dot{Q}_{cond}}{dx} + hp (T - T_{\infty}) = 0 \quad \text{Ecuación 2-13}$$

Con base en la ley de Fourier de la conducción del calor (ver Ecuación 1-3), se tiene;

$$\dot{Q}_{conduccion} = -kAc \frac{dT}{dx}$$

donde Ac es el área de la sección transversal de la aleta en la ubicación x . La sustitución de esta relación en la ecuación;

$$\frac{d\dot{Q}_{cond}}{dx} + hp (T - T_{\infty}) = 0 \quad \text{Ecuación 2-14}$$

se obtiene la ecuación diferencial que rige la transferencia de calor en las aletas;

$$\frac{d}{dx} \left(kAc \frac{dT}{dx} \right) - hp(T - T_{\infty}) = 0 \quad \text{Ecuación 2-15}$$

En general el área de sección transversal Ac y el perímetro p de una aleta varían con x , lo cual hace que esta ecuación diferencial sea difícil de resolver. En el caso especial de una sección transversal constante y conductividad térmica constante, la ecuación diferencial se reduce a;

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hp}{kAc} (T - T_{\infty}) = 0 \quad \text{Ecuación 2-16}$$

Al resolver la ecuación anterior con las respectivas condiciones de borde se obtienen los siguientes casos que sirven para obtener la transferencia de calor de una aleta, así como su distribución de temperaturas:

Parámetros para el análisis de las aletas:

- Diferencia de temperaturas:

$$(\theta): \theta_x = T_x - T_{\infty} \quad \text{Ecuación 2-17}$$

Máxima diferencia de temperaturas:

$$(\theta_b): \theta_s = T_s - T_\infty \quad \text{Ecuación 2-18}$$

- Factor geométrico:

$$(m): m = \sqrt{\frac{h p}{K A_c}} \quad \text{Ecuación 2-19}$$

Caso A: Aleta con convección en el extremo.

Todas las aletas están expuestas a convección desde el extremo, excepto cuando el mismo se encuentre aislado o su temperatura sea igual a la del fluido. Para este caso se tiene:

Transferencia de calor de la aleta:

$$Q_f = \sqrt{hPKA_c} \theta_b \frac{\sin h(mL) + \left(\frac{h}{mk}\right) \cos h(mL)}{\cos h(mL) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sin h(mL)} \quad \text{Ecuación 2-20}$$

Distribución de Temperaturas:

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = \frac{\cosh(m(L-x)) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh(mL)} \quad \text{Ecuación 2-21}$$

Caso B: Aleta con extremo adiabático.

Se considera aleta de este tipo cuando el área del extremo no intercambia calor con el fluido adyacente.

Transferencia de calor de la aleta:

$$Qf = \sqrt{hPKA_c} \theta_b \tanh(mL)$$

Ecuación 2-22

Distribución de Temperaturas:

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)}$$

Ecuación 2-23

Caso C: Aleta de extremo con temperatura establecida.

Cuando se conoce la temperatura en el extremo de la aleta:

Transferencia de calor de la aleta:

$$Qf = \sqrt{hPKA_c} \theta_b \frac{\cosh(mL) - \left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right)}{\sinh(mL)}$$

Ecuación 2-24

Distribución de Temperaturas:

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = \frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right) \sinh(mx) + \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)}$$

Ecuación 2-25

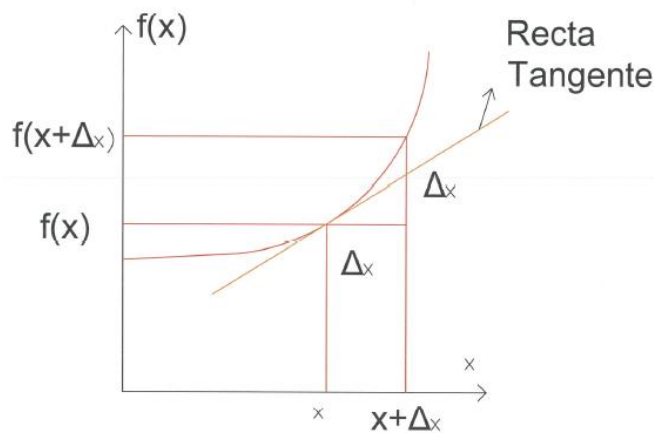
CAPÍTULO 3

SOLUCIÓN NUMÉRICA CON DIFERENCIAS FINITAS Y SISTEMA MATRICIAL

3.1 Diferencias finitas de ecuaciones diferenciales

Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales se basan en el reemplazo de las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas. El caso del método de las diferencias finitas es realizado al reemplazar las derivadas por diferencias.

Figura 3.1 Transferencia de Calor en Aletas. La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la función en ese punto



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

Las derivadas son los bloques de construcción de las ecuaciones diferenciales. Considere una función f que depende de x como se muestra en la Figura 3.1. La primera derivada de $f(x)$ en un punto es equivalente a la pendiente de una recta tangente a la curva en ese punto y se define como (Cengel, 2004, p.299):

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ecuación 3-1

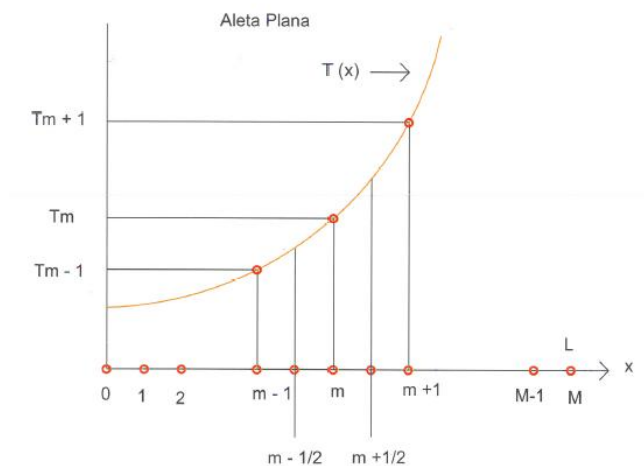
lo que da como resultado la razón del incremento Δf en función al incremento Δx de la variable independiente cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta un error en el límite indicado se obtiene la siguiente relación aproximada para la derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{Ecuación 3-2}$$

Esta ecuación aproximada de la derivada en términos de diferenciales se le conocerá como Diferencias finitas de la primera derivada. Usando términos de métodos numéricos se podrá representar la ecuación anterior (Ecuación 3-2) al escribir la expansión de la serie de Taylor de la función x entorno al punto x (Cengel, 2004, p.300):

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots \quad \text{Ecuación 3-3}$$

Figura 3.2 Transferencia de calor en aletas. Esquema de los nodos y temperaturas nodales usados en el desarrollo de la formulación en diferencias finitas de la transferencia de calor en una pared plana



Fuente: Cengel, 2004, p.300

Al despreciar todos los términos excepto los dos primeros, el primer término despreciado es proporcional a Δx^2 , por lo tanto el error de esta aproximación también es proporcional a Δx^2 . Sin embargo, el error conmutativo producido después

de M pasos en la dirección de la longitud L es proporcional a Δx , ya que $M\Delta x^2 = \left(\frac{L}{\Delta x}\right)\Delta x^2 = L\Delta x$. Entonces, mientras menor sea Δx menor será el error, por lo tanto más exacta será la aproximación. (Cengel, 2004, p.301)

Si se considera la transferencia de calor unidimensional en estado estacionario en una aleta rectangular de longitud L con generación de calor $\dot{g}(x)$ y conductividad térmica del material constante k . La aleta se subdivide en M ecuaciones iguales de longitud $\Delta x = \frac{L}{M}$, en la dirección x , y las divisiones entre las regiones se seleccionan como los nodos. Por lo tanto, se tiene $M + 1$ nodos nombrados $0, 1, 2, 3, \dots, m-1, m, m+1, \dots, M$, como se muestra en la Figura 3.2. La coordenada x de cualquier punto m es simplemente $x_m = m\Delta x$ y la temperatura en ese punto es simplemente $T(x_m) = T_m$.

La ecuación de conducción de calor comprende las segundas derivadas de la temperatura con respecto a las variables espaciales, tales como $\frac{d^2T}{dx^2}$, de este modo la formulación de diferencias finitas es basada en el reemplazo de las segundas derivadas por diferencias aprobadas, para esto se iniciara el proceso con las primeras derivadas. Usando la Ecuación 3-2 la primera derivada de la temperatura $\frac{dT}{dx}$ en los puntos medios $m - \frac{1}{2}$ y $m + \frac{1}{2}$ de las secciones que están en el uno y otro lado del nodo m , esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{m-\frac{1}{2}} \cong \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \quad y \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{m+\frac{1}{2}} \cong \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad \text{Ecuación 3-4}$$

La segunda derivada de la temperatura en el nodo m se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_m &\cong \frac{\left.\frac{dT}{dx}\right|_{m+\frac{1}{2}} - \left.\frac{dT}{dx}\right|_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3-5}$$

Esto es la representación en diferencias finitas de la segunda derivada en un nodo interno general m . Por lo que la segunda derivada de la temperatura en el nodo m se expresa en términos de las temperaturas en el nodo m y sus dos nodos vecinos. Entonces se obtendrá la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0; \quad \text{Ecuación 3-6}$$

que rige a transferencia de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana, con conducción de calor y conductividad térmica constante (Cengel, 2004, p.302).

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M - 1 \quad \text{Ecuación 3-7}$$

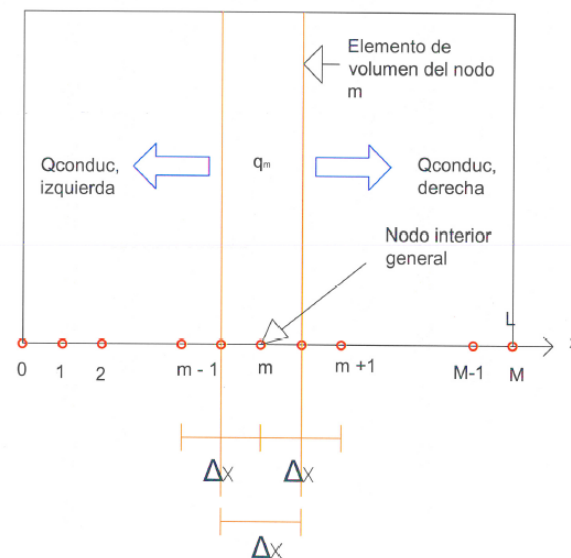
donde \dot{g}_m es la velocidad de generación de calor por unidad de volumen en el nodo m . Si se especifican las temperaturas superficiales T_0 y T_M , la aplicación de esta ecuación a cada uno de los $M - 1$ nodos interiores conduce a $M - 1$ ecuaciones para la determinación de $M - 1$ temperaturas desconocidas en los nodos interiores. La solución simultánea de estas ecuaciones de los valores de la temperatura en los nodos. Si no se conocen las temperaturas en las superficies exteriores, entonces se necesitan obtener dos ecuaciones más en una manera semejante, mediante las condiciones de frontera específicas. Entonces se determinaran las temperaturas desconocidas en los $M + 1$ nodos, al resolver simultáneamente el sistema resultante de $M + 1$ ecuaciones en las $M + 1$ incógnitas (Cengel, 2004, p.302).

3.2 Transferencia de calor unidimensional en estado estacionario.

Para la formulación en diferencias finitas de la transferencia de calor en una aleta rectangular se analiza el procedimiento del balance de energía y resolver las ecuaciones resultantes. El método de balance de energía está basado en la subdivisión del medio en un número suficiente de elementos de volumen y aplicar un balance de energía en cada elemento. Se empieza seleccionando los puntos nodales o

nodos en los cuales se determinara las temperaturas para formar elementos o volúmenes de control sobre los nodos y trazando rectas que pasen por los puntos medios entre los nodos. De esta manera los nodos interiores se mantienen a la mitad de los elementos y las propiedades en el nodo, como la temperatura y la velocidad de generación de calor representan las propiedades promedio del elemento (ver Figura 3.3). Es conveniente pensar que la temperatura varía linealmente entre los nodos, en especial al expresar la conducción de calor entre los elementos mediante la Ley de Fourier. (Cengel, 2004, p.303)

Figura 3.3 Transferencia de Calor en Aletas. Puntos nodales y elementos de volumen para la formulación en diferencias finitas de la unidimensional en una pared plana



Fuente: Cengel, 2004, p.303

Los elementos se forman al trazar elementos verticales que pasan por los puntos medios entre los nodos. Se nota que todos los elementos interiores representados por nodos interiores son de tamaño completo, es decir una longitud Δx , por lo tanto el tamaño de los dos elementos en las fronteras es la mitad. (Kern & Kraus, 1972) p.97

Para obtener una ecuación en diferencias general para los nodos interiores, como se considera el elemento representado por el nodo m y los dos nodos vecinos $m - 1$ y $m + 1$. Si se supone que la conducción de calor se lleva a cabo hacia los elementos

sobre todas las superficies, un balance de energía en el elemento se puede expresar como:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{la conducción} \\ \text{de calor en la} \\ \text{superficie} \\ \text{izquierda} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{la conducción} \\ \text{de calor en la} \\ \text{superficie} \\ \text{derecha} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad de} \\ \text{la generación de} \\ \text{calor dentro} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Velocidad} \\ \text{de cambio del} \\ \text{contenido} \\ \text{de energía} \\ \text{del elemento} \end{array} \right)$$

o bien como:

$$\dot{Q}_{cond,izquierda} + \dot{Q}_{cond,derecha} + \dot{E}_{gen,elemento} = \frac{\Delta E_{elemento}}{\Delta t} = 0 \quad \text{Ecuación 3-8}$$

Puesto que el contenido de energía de un medio no cambia en condiciones estacionarias, y por tanto, $\Delta E_{elemento} = 0$. La razón de la generación de calor del elemento se expresa como:

$$\dot{E}_{gen,elemento} = \dot{g}_m V_{elemento} = \dot{g}_m A \Delta x; \quad \text{Ecuación 3-9}$$

donde \dot{g}_m es la razón de generación de calor por unidad de volumen, en W/m^3 , evaluada en el nodo m y tratada como constante para el elemento completo, y A es el área de transferencia de calor, la cual es simplemente la superficie interior (o exterior) de la pared. (Cengel, 2004, p.303)

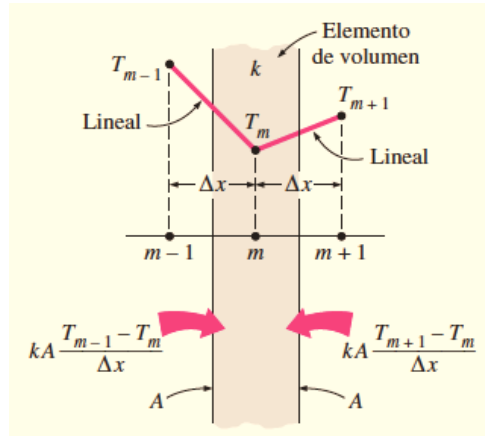
Hay que recordar que cuando la temperatura varía linealmente, la razón estacionaria de conducción de calor a través de una pared plana de espesor L se puede expresar como:

$$\dot{Q}_{cond} = kA \frac{\Delta T}{L}; \quad \text{Ecuación 3-10}$$

donde ΔT es el cambio de temperatura a través de la aleta y la dirección de la transferencia de calor va del lado con mayor temperatura hacia el de menor. En el caso de una aleta con generación de calor, la variación de temperatura no es lineal,

por lo tanto, no se puede aplicar la relación anteriormente mencionada. Sin embargo, es posible aproximar la variación de temperatura entre los nodos con si fuera lineal en la determinación de la conducción de calor a través de una capa delgada Δx entre dos nodos (Ver Figura 3.4). Es obvio que entre menor sea la distancia Δx entre dos nodos, mas precisa es esta aproximación. (de hecho, las consideraciones de este tipo constituyen la razón para clasificar los métodos numéricos como sistemas aproximados de solución; en el caso limite en que Δx tienda a cero, la formulación se vuelve exacta y se obtiene una ecuación diferencial).

Figura 3.4 Transferencia de Calor en Aletas. En la formulación en diferencias finitas que la temperatura varia linealmente entre los nodos.



Fuente: Cengel, 2004, p. 304

Al suponer que la dirección de transferencia de calor es ambas superficies del elemento es hacia el nodo m , la velocidad de conducción de calor en las superficies izquierda y derecha se pueden expresar:

$$\dot{Q}_{cond. izquierda} = kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad y \quad \dot{Q}_{cond. derecha} = kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad \text{Ecuación 3-11}$$

Al sustituir las ecuaciones (Ecuación 3-9 y Ecuación 3-11) en la Ecuación 3-8 se obtiene:

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{q}_m A \Delta x = 0 \quad \text{Ecuación 3-12}$$

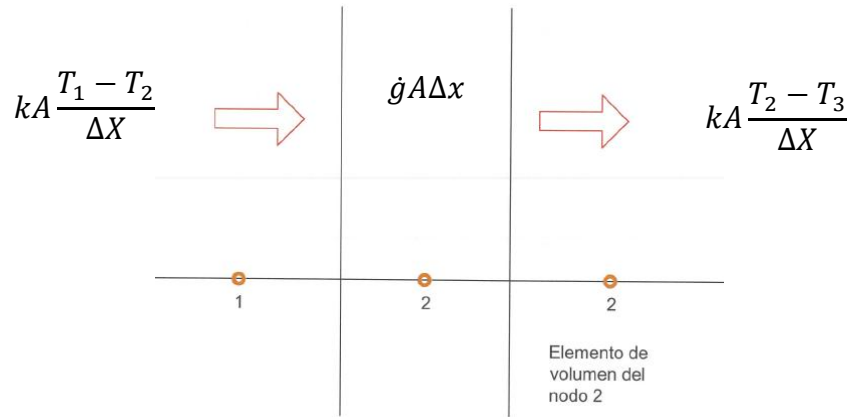
La cual se simplifica a:

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M - 1 \quad \text{Ecuación 3-13}$$

De nuevo esta ecuación se puede aplicar a los $M - 1$ nodos interiores y su aplicación da lugar a $M - 1$ ecuaciones para la determinación de las temperaturas en $M + 1$ nodos. Las dos ecuaciones adicionales a ser resultas para las $M + 1$ temperaturas desconocidas en los nodos se obtienen mediante la aplicación del balance de energía en los dos elementos en las fronteras, caso diferente si son especificadas las temperaturas en las fronteras.

Es probable creer que si se conduce calor hacia el elemento desde ambos lados, la temperatura del medio tendrá que elevarse y como consecuencia la conducción de calor no puede ser estacionaria. Algo más realista es suponer que la transferencia de calor es hacia el elemento en el lado izquierdo y hacia fuera del elemento en el lado derecho. Al repetir la formulación mediante esta suposición, se obtendrá el mismo resultado, ya que el término de conducción de calor del lado derecho comprenderá $T_m - T_{m+1}$, en lugar de $T_{m+1} - T_m$. Por lo tanto, la dirección supuesta de la transferencia de calor en las superficies del elemento de volumen no tiene efecto sobre la formulación, como se muestra en la Figura 3.5 y Figura 3.6. (Lo común en estos casos es que no se conozca la dirección real de la transferencia de calor.) Pese a esto, resulta conveniente conocer que la conducción de calor es hacia el elemento en todas las superficies y no preocuparse acerca del signo de los términos de conducción. Entonces todas las diferencias de temperatura en las relaciones de conducción se expresan como la temperatura del nodo vecino menos la del nodo considerado y son sumados todos los términos de conducción. (Cengel, 2004, p.304)

Figura 3.5 Transferencia de Calor hacia afuera del elemento



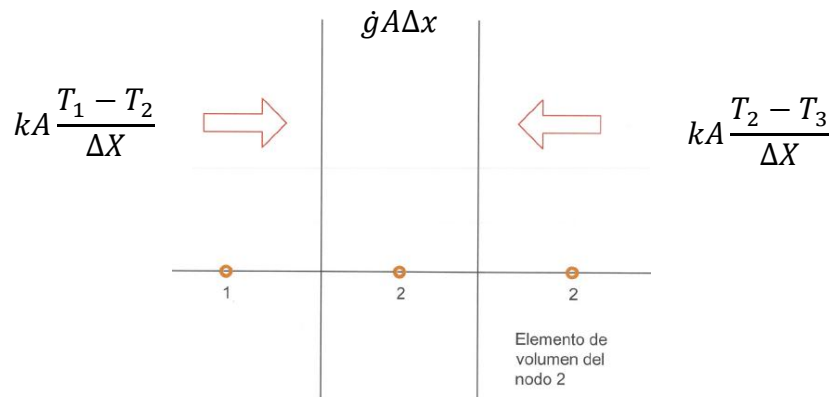
Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

$$kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} - kA \frac{T_2 - T_3}{\Delta x} + \dot{q}_2 A \Delta x = 0 \quad \text{Ecuación 3-14}$$

o bien,

$$T_1 - 2T_2 + T_3 + \dot{q}_2 A \Delta x^2 / k \quad \text{Ecuación 3-15}$$

Figura 3.6 Transferencia de Calor hacia adentro del elemento



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

$$kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + kA \frac{T_2 - T_3}{\Delta x} + \dot{q}_2 A \Delta x = 0$$

o bien,

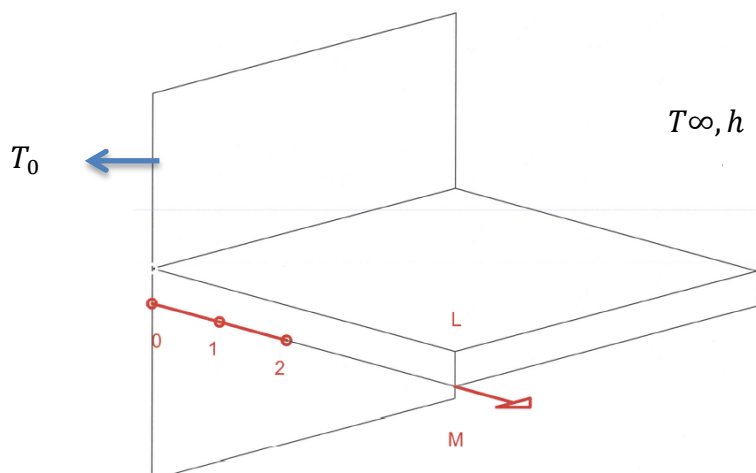
$$T_1 - 2T_2 + T_3 + \dot{q}_2 A \Delta x^2 / k$$

3.3 Condiciones de temperatura específica, flujo específico de calor y convección (condiciones de borde).

Existe una relación general para obtener la ecuación en diferencias finitas de cada nodo interior. Sin embargo, esta relación no es aplicable a los nodos externos o sobre las fronteras, ya que cada nodo requiere la presencia de nodos vecinos en ambos lados, un nodo externo no tiene nodo vecino en al menos uno de sus lados, por esto motivo se necesita obtener por separado las ecuaciones en diferencias finitas de los nodos de frontera o externos. Para esto la aplicación de un balance de energía en los elementos de volumen de los nodos de frontera ayuda a la obtención de la ecuación en diferencias finitas en cualquier nodo externo (Holman, 1999, p.124).

Las condiciones de borde más comunes de encontrar son la temperatura específica, flujo específico de calor y convección. Para el caso de la transferencia de calor unidimensional en estado estacionario en una aleta de longitud “ L ”, el número de nodo en la superficie izquierda en $x = 0$, es 0, y en la superficie derecha, en $x = L$, es M . Las condiciones de borde de temperatura específica tanto en la superficie izquierda como en la derecha se pueden expresar como (Figura 3.7) (Cengel, 2004, p.305):

Figura 3.7 Condiciones de Frontera para Diferencias Finitas



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

$$T(0) = T_0 = \text{Valor específico}$$

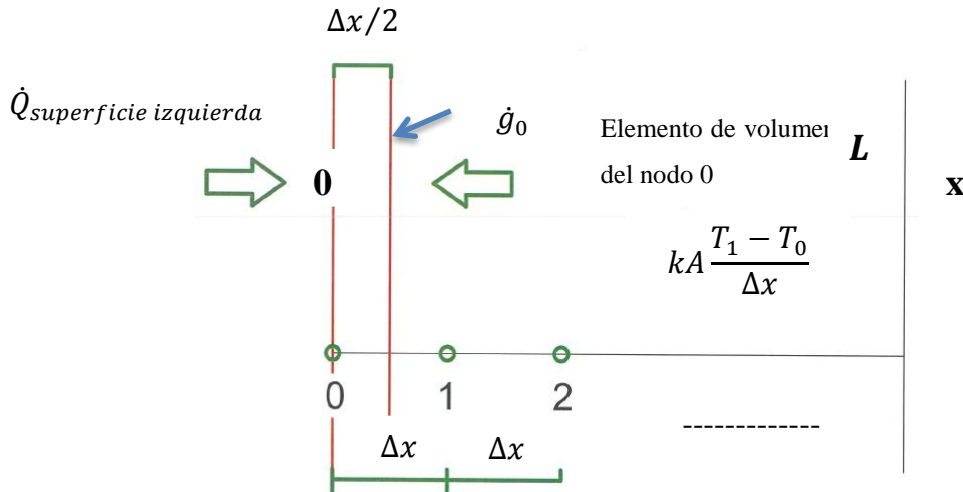
$$T(L) = T_M = T_\infty = \text{Valor específico}$$

donde T_0 y T_M son las temperaturas específicas $x = 0$ y $x = L$, respectivamente.

Cuando se especifican otras condiciones de frontera, como el flujo específico de calor o la convección se obtiene la ecuación en diferencias finitas para el nodo en esta frontera al escribir el respectivo balance de energía sobre el elemento de volumen en la frontera. Para la transferencia de calor en condiciones estacionarias. (Cengel, 2004, p.306)

$$\sum_{\text{Todos los lados}} \dot{Q} + \dot{E}_{\text{gen, elemento}} = 0 \quad \text{Ecuación 3-16}$$

Figura 3.8 Esquema para formulación de diferencias finitas



Fuente: Cengel, 2004, p.305

Si se tiene en cuenta que toda la transferencia de calor es hacia el elemento de volumen desde toda la superficie, excepto para el flujo específico de calor, ya que su dirección está determinada. El flujo específico de calor se toma como cantidad positiva si es hacia el medio y como negativa si es hacia fuera del medio. Entonces la formulación de diferencias finitas en el nodo $m = 0$ de una aleta rectangular de

longitud L , durante la conducción de calor unidimensional en estado estacionario se puede expresar como (Figura 3.8). (Cengel, 2004, p.306)

$$\dot{Q}_{superficie\ izquierda} + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0, \quad \text{Ecuación 3-17}$$

donde $A \frac{\Delta x}{2}$ es volumen del elemento de volumen, \dot{g}_0 es la razón de la generación de calor por unidad de volumen ($\frac{W}{m^3}$) en $x = 0$, y A es el área de transferencia de calor, la cual es constante para una aleta rectangular. Obsérvese que en la Ecuación 3-17 el denominador del segundo término es Δx en lugar de $\frac{\Delta x}{2}$, esto se debe a que la razón en ese termino comprende la diferencia de temperatura entre los nodos 0 y 1, por lo tanto, se debe usar la distancia entre esos dos nodos, la cual es Δx .

A partir de la ecuación 3.14 se puede obtener la forma en diferencias finitas de varias condiciones de frontera al reemplazar $\dot{Q}_{superficie\ izquierda}$ por una expresión adecuada

- Condición de frontera de flujo de calor específico.

$$\dot{q}_0 + kA \frac{T_1 + T_2}{\Delta x} + \dot{g}_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3-18}$$

Cuando la frontera está aislada:

$$kA \frac{T_1 + T_2}{\Delta x} + \dot{g}_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3-19}$$

- Condición de frontera de convección.

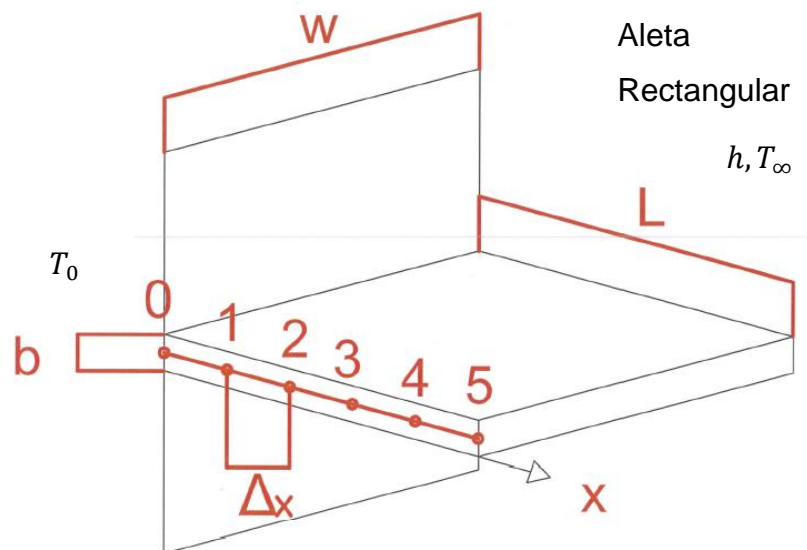
$$hA(T_\infty - T_0) + kA \frac{T_1 + T_2}{\Delta x} + \dot{g}_0 \left(A \frac{\Delta x}{2} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3-20}$$

3.4 Modelo experimental de transferencia de calor desde aletas rectangulares

Se considera una aleta de aleación de aluminio ($k = 180 \frac{W}{m^{\circ}C}$) de sección transversal rectangular, con longitud $L = 5cm$, espesor de la base $b = 1cm$ y ancho w muy grande, como se muestra en la Figura 3.9.

La base de la aleta se mantiene a una temperatura de $T_0 = 200^{\circ}C$. La aleta pierde calor hacia el medio circundante que está a $T_{\infty} = 25^{\circ}C$, con un coeficiente de transferencia de calor de $h = 15 \frac{W}{m^2^{\circ}C}$. Usando el método de las diferencias finitas con seis nodos igualmente espaciados a lo largo de la aleta, en la dirección x , determinar las temperaturas de los nodos, la razón de transferencia de calor desde la aleta para un $w = 1m$.

Figura 3.9 Esquema para el modelo experimental



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

Análisis:

- La transferencia de calor es estacionaria, ya que no se tiene indicación de cambio con el tiempo.
- La temperatura a lo largo de la aleta varía solo en la dirección de x.

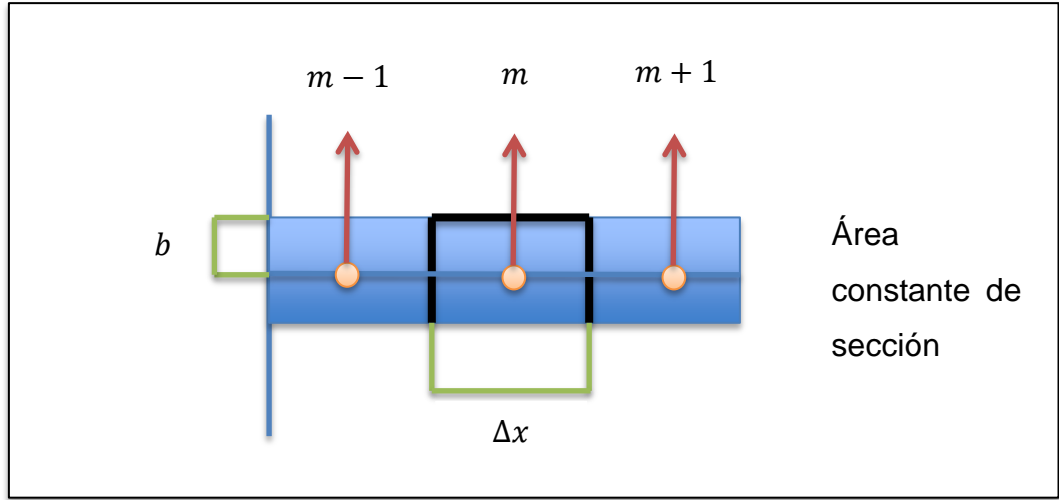
- La conductividad térmica es constante.
- La transferencia de calor por radiación es despreciable.
- Al especificar que el número de nodos en la aleta es $M = 6$ y su ubicación es como se muestra en la Figura 3.9 entonces el espacio nodo será resuelto de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{L}{M - 1} = \frac{0.05 \text{ m}}{6 - 1} = 0.01 \text{ m} \quad \text{Ecuación 3-21}$$

- La temperatura en el nodo cero es $T_0 = 200^\circ\text{C}$ y se deben determinar las temperaturas en los cinco nodos restantes. Por tal motivo se necesitará tener cinco ecuaciones con el fin de determinar cada una de ellas. Los nodos 1,2,3 y 4 son interiores y se obtiene la formulación en diferencias finitas para un nodo interior general m mediante un balance de energía sobre el elemento de volumen de este nodo. Dado que la transferencia de calor es estacionaria, es decir que no hay generación de calor en la aleta y se supone que la transferencia de calor es hacia el medio en todos los lados, el balance de energía se expresará de la siguiente manera:

$$\sum_{\substack{\text{Todos} \\ \text{los lados}}} \dot{Q} = 0 \rightarrow kA_{\text{izquierda}} \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA_{\text{derecha}} \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + hA_{\text{conv}}(T_\infty - T_m) = 0$$

Figura 3.10 Esquema 1 para el modelo experimental



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

Nótese en la Figura 3.10 que las áreas de transferencia de calor son constantes geoméricamente para cada nodo, estas serán expresan de la siguiente forma:

$$A_{izquierda} = (Altura \times Ancho)_{lado\ m-1} = b \times w$$

$$A_{derecha} = (Altura \times Ancho)_{lado\ m+1} = b \times w$$

$$A_{convección} = (Longitud \times Ancho)_{centro\ del\ nodo\ m} = \Delta x \times w$$

Al sustituir se obtiene:

$$(w \times b)k \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + (w \times b)k \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + h(\Delta x \times w)(T_{\infty} - T_m) = 0$$

Al multiplicar por $\frac{\Delta x}{kwb}$:

$$T_{m-1} - T_m + T_{m+1} - T_m + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_{\infty} - T_1) = 0$$

Si se tiene en cuenta que:

$$\Delta x = 0.01m \rightarrow \Delta x^2 = 0.0001\ m^2$$

$$k = 180 \frac{W}{m^{\circ}C}$$

$$T_{\infty} = 25^{\circ}C$$

$$T_0 = 200^{\circ}C$$

$$h = 15 \frac{W}{m^2^{\circ}C}$$

$$b = 0.01 \text{ m}$$

Entonces;

$$\frac{\Delta x^2 h}{kb} = \frac{0.0001 \text{ m}^2 \times 15 \frac{W}{m^2^{\circ}C}}{180 \frac{W}{m^{\circ}C} \times 0.01 \text{ m}} = 0.0008333 \text{ (adimensional)} = 8.3 \times 10^{-4}$$

Si se usa 1,2,3,4 como valores de m ;

Para $m = 1$:

$$T_{m-1} - T_m + T_{m+1} - T_m + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_{\infty} - T_m) = 0$$

$$T_{1-1} - T_1 + T_{1+1} - T_1 + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_{\infty} - T_1) = 0$$

$$T_0 - T_1 + T_2 - T_1 + 0.0008333(25^{\circ}C - T_1) = 0$$

$$200^{\circ}C - 2.0008333T_1 + T_2 = -0.02083^{\circ}C$$

$$-2.0008333T_1 + T_2 = -200.02083^{\circ}C$$

Para $m = 2$;

$$T_{m-1} - T_m + T_{m+1} - T_m + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_{\infty} - T_m) = 0$$

$$T_{2-1} - T_2 + T_{2+1} - T_2 + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_{\infty} - T_2) = 0$$

$$T_1 - T_2 + T_3 - T_2 + 0.0008333(25^{\circ}C - T_2) = 0$$

$$T_1 - 2.0008333T_2 + T_3 = -0.02083^{\circ}C$$

Para $m = 3$;

$$T_{m-1} - T_m + T_{m+1} - T_m + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_{\infty} - T_m) = 0$$

$$T_{3-1} - T_3 + T_{3+1} - T_3 + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_\infty - T_3) = 0$$

$$T_2 - T_3 + T_4 - T_3 + 0.0008333(25^\circ\text{C} - T_3) = 0$$

$$T_2 - 2.0008333T_3 + T_4 = -0.02083^\circ\text{C}$$

Para $m = 4$;

$$T_{m-1} - T_m + T_{m+1} - T_m + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_\infty - T_m) = 0$$

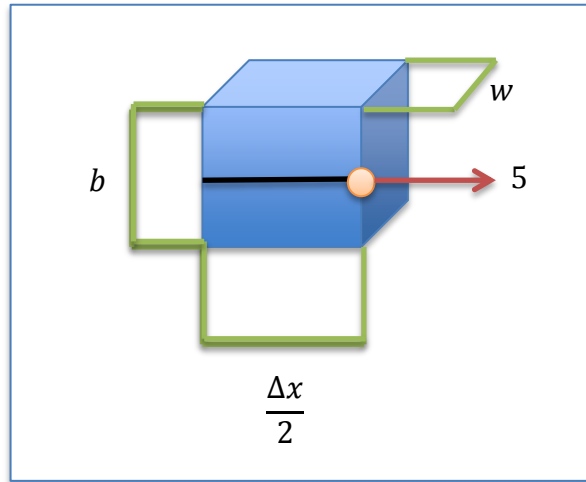
$$T_{4-1} - T_4 + T_{4+1} - T_4 + \frac{\Delta x^2 h}{kb} (T_\infty - T_4) = 0$$

$$T_3 - T_4 + T_5 - T_4 + 0.0008333(25^\circ\text{C} - T_4) = 0$$

$$T_3 - 2.0008333T_4 + T_5 = -0.02083^\circ\text{C}$$

Para el nodo 5 que no tiene vecino a la derecha se tiene la Figura 3.11.

Figura 3.11 Esquema 2 para el modelo experimental



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

El área en el nodo 5 se expresa de la siguiente manera:

$$A_{\text{izquierda}} = (\text{Altura} \times \text{Ancho})_{\text{lado } m-1} = w \times b$$

$$A_{\text{convección}} = (\text{Longitud} \times \text{Ancho})_{\text{centro del nodo 5}} = w \times \frac{\Delta x}{2}$$

Si se construye un balance de energía para el nodo 5, se obtiene la siguiente ecuación para las temperaturas.

$$kA_{izquierda} \frac{T_4 - T_5}{\Delta x} + hA_{convección}(T_{\infty} - T_5)$$

Al reemplazar las áreas:

$$k(wb) \frac{T_4 - T_5}{\Delta x} + h \left(\frac{\Delta x}{2} w \right) (T_{\infty} - T_5)$$

Al multiplicar por $\frac{\Delta x}{kwb}$;

$$T_4 - T_5 + \frac{h\Delta x^2}{2kb} (T_{\infty} - T_5) = 0$$

Al resolver $\frac{h\Delta x^2}{2kb}$;

$$\frac{h\Delta x^2}{2kb} = \frac{15 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \times 0.0001 m^2}{2 \times 180 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \times 0.01 m} = 0.0004167(adimensional) = 4.16 \times 10^{-4}$$

Si se usa los valores dados se halla la ecuación:

$$T_4 - T_5 + \frac{h\Delta x^2}{2kb} (T_{\infty} - T_5) = 0$$

$$T_4 - T_5 + 0.0004167(25^\circ C - T_5) = 0$$

$$T_4 - T_5 + 0.010417^\circ C - 0.0004167T_5 = 0$$

$$T_4 - 1.0004167T_5 = -0.010417^\circ C$$

Con las 5 ecuaciones halladas, se debe construir una matriz de 5x5 para obtener el valor de cada una de las temperaturas.

Figura 3.12 Diagrama para elaborar resolución de sistemas de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Fuente: Stremmler, 1998, p.89

3.4.1 Elaboración del sistema de ecuaciones.

$$-2.0008333T_1 + T_2 = -200.02083^\circ\text{C}$$

$$T_1 - 2.0008333T_2 + T_3 = -0.02083^\circ\text{C}$$

$$T_2 - 2.0008333T_3 + T_4 = -0.02083^\circ\text{C}$$

$$T_3 - 2.0008333T_4 + T_5 = -0.02083^\circ\text{C}$$

$$T_4 - 1.0004167T_5 = -0.010417^\circ\text{C}$$

Tabla 3.1 Matriz del sistema de ecuaciones

	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	=	
m=1	-2,0008333	1	0	0	0	=	-200,02083
m=2	1	-2,0008333	1	0	0	=	-0,02083
m=3	0	1	-2,0008333	1	0	=	-0,02083
m=4	0	0	1	-2,0008333	1	=	-0,02083
	0	0	0	1	-1,0004167	=	-0,010417

3.4.2 Método experimental usando con Excel.

En forma experimental se usa las hojas de cálculo de Excel para resolver el sistema de ecuaciones ya indicado. Excel indica que primero se debe separar en dos matrices, la una de 5x5 y la otra de 1x5, las cuales serán nombradas como A y \vec{b} respectivamente.

Tabla 3.2 Matriz A

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2,0008333 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2,0008333 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2,0008333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2,0008333 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,0004167 \end{pmatrix}$$

Tabla 3.3 Vector \vec{b}

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -200,02083 \\ -0,02083 \\ -0,02083 \\ -0,02083 \\ -0,010417 \end{pmatrix}$$

Como la matriz A tiene un determinante diferente de 0, es posible sacar la inversa, la cual será:

Tabla 3.4 Matriz inversa de A

MATRIZ INVERSA DE A				
-0,996278506	-0,99338721	-0,9913237	-0,99008627	-0,989673871
-0,99338721	-1,987602209	-1,98347348	-1,98099757	-1,980172437
-0,991323704	-1,983473478	-2,97727608	-2,97355965	-2,972321081
-0,990086268	-1,980997575	-2,97355965	-3,96859959	-3,966946559
-0,989673871	-1,980172437	-2,97232108	-3,96694656	-4,964877695

Si se usa:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Ecuación 3-22

Al Pre-multiplicar miembro a miembro por la inversa de A:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Y si se agrupa:

$$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Entonces se obtiene la ecuación general para sistemas de ecuaciones, teniendo en cuenta que \vec{x} es el vector que contiene las incógnitas.

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Ecuación 3-23

Tabla 3.5 Sistema $\vec{x} = A\vec{b}$

MATRIZ INVERSA DE A					\vec{b}
-0,996278506	-0,99338721	-0,9913237	-0,99008627	-0,989673871	-200,02083
-0,99338721	-1,987602209	-1,98347348	-1,98099757	-1,980172437	-0,02083
-0,991323704	-1,983473478	-2,97727608	-2,97355965	-2,972321081	-0,02083
-0,990086268	-1,980997575	-2,97355965	-3,96859959	-3,966946559	-0,02083
-0,989673871	-1,980172437	-2,97232108	-3,96694656	-4,964877695	-0,010417

Al calcular la multiplicación mostrada en Excel se tiene como resultado:

Tabla 3.6 Resultado vector \vec{x}

VECTOR \vec{x}		
\vec{x}	TEMPERATURA	RESULTADO
\vec{x}_1	$T_1=$	199,348728
\vec{x}_2	$T_2=$	198,8427434
\vec{x}_3	$T_3=$	198,4816244
\vec{x}_4	$T_4=$	198,2650701
\vec{x}_5	$T_5=$	198,1929001

Para comprobar que los resultados sean los correctos se aplica una comprobación hallando el vector \vec{b} , aplicando la Ecuación 3-22;

Tabla 3.7 Comprobación multiplicando la matriz A por la vector \vec{x}

MATRIZ A					\vec{x}
-2,0008333	1	0	0	0	
1	-2,0008333	1	0	0	199,348728
0	1	-2,0008333	1	0	198,842743
0	0	1	-2,0008333	1	198,481624
0	0	0	1	-1,0004167	198,26507
					198,1929

Para comprobar si cumple el sistema de ecuaciones:

Tabla 3.8 Resultado del vector \vec{b} en función a la multiplicación de la Tabla 3.7

VECTOR \vec{b}	
b_1	-200,02083
b_2	-0,02083
b_3	-0,02083
b_4	-0,02083
b_5	-0,010417

Por lo tanto usando diferencias finitas se sabe que las temperaturas en los nodos señalados son las siguientes:

$$T_1 = 199.348728 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 198.842743 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 198.481624 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 198.26507 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 198.1929 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La razón total de transferencia de calor es simplemente la suma de la transferencia de calor desde cada elemento de volumen hacia el ambiente, y para $w = 1m$, entonces se empieza el siguiente análisis:

$$\dot{Q}_{aleta} = \sum_{m=0}^5 \dot{Q}_{elemento,m} = \sum_{m=0}^5 hA_{convección,m}(T_m - T_{\infty})$$

Puesto que el área superficial de calor es $w\Delta x$ para los nodos 0 y 5 y el doble de grande para los nodos interiores 1, 2, 3, 4 se tiene lo siguiente:

$$\dot{Q}_{aleta} = hA_{nodo\ 1\ y\ 5}[(T_0 - T_{\infty}) + 2(T_1 - T_{\infty}) + 2(T_2 - T_{\infty}) + 2(T_3 - T_{\infty}) + 2(T_4 - T_{\infty}) + (T_5 - T_{\infty})]^{\circ}\text{C}$$

$$\dot{Q}_{aleta} = hw\Delta x[T_0 + 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + T_5 - 10T_{\infty}]^{\circ}\text{C}$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{aleta} &= 15 \frac{W}{m^2^{\circ}\text{C}} \times 1m \\ &\times 0.01m[200^{\circ}\text{C} + 2(794.938165^{\circ}\text{C}) + 198.1929^{\circ}\text{C} - 250^{\circ}\text{C}]\end{aligned}$$

$$\dot{Q}_{aleta} = 0.15W(1738.06923)$$

$$\dot{Q}_{aleta} = 260.710W$$

Si la aleta completa estuviera a la temperatura de la base de $T_0 = 200^{\circ}\text{C}$, la razón total de transferencia de calor desde la aleta, para un $w = 1m$, sería:

$$\dot{Q}_{\text{máximo}} = hA_{aleta, total}(T_0 - T_{\infty}) \quad \textbf{Ecuación 3-24}$$

$$\dot{Q}_{\text{máximo}} = hwL(T_0 - T_{\infty})$$

$$\dot{Q}_{\text{máximo}} = 2 \times 15 \frac{W}{m^2^{\circ}\text{C}} \times 1m \times 0.05m(200^{\circ}\text{C} - 25^{\circ}\text{C})$$

$$\dot{Q}_{\text{máximo}} = 1.50W(175)$$

$$\dot{Q}_{\text{máximo}} = 262.50W$$

Entonces la eficiencia de la aleta se determina a partir de:

$$n_{aleta} = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{\dot{Q}_{\text{máximo}}} \quad \textbf{Ecuación 3-25}$$

$$n_{aleta} = \frac{260.710W}{262.50W} = 0.993$$

3.5 Método de Crout de factorización de matrices.

Existen diferentes formas de resolver ecuaciones lineales, que a lo largo de la historia se han ido desarrollando y modificando para tener resultados más exactos o a la vez facilitar de alguna manera la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Uno de los métodos creados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y que a la vez ha sido modificado es el Método de Crout. El cual parte de un principio de factorización LU de matrices:

Tabla 3.9 Nomenclatura de la matriz A para la factorización LU

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Al tener una matriz A, aplicando una factorización LU, se obtiene dos matrices de la siguiente manera:

Tabla 3.10 Nomenclatura factorización A=LU

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

Ecuación 3-26

$$A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$$

donde L es la matriz inferior de A y U es la matriz superior de A. Esta factorización existe cuando se puede resolver de manera única el sistema lineal (ver Ecuación 3-26), entonces el sistema $A\vec{x} = LU\vec{x} = \vec{b}$ puede transformarse en el sistema $U\vec{x} = L^{-1}\vec{b}$ y como U es triangular superior, se puede aplicar una sustitución hacia atrás. Por consiguiente es deseable encontrar un método más directo para la determinación de cada uno de sus valores incógnitas, donde se realice tan solo una sustitución hacia adelante y otra hacia atrás, a este método más directo se lo conoce

como Método de Crout o Método Doolittle (el método Doolittle es el método de Crout parcialmente modificado).

El método de Crout tiene todos los elementos principales de la diagonal en la matriz triangular U igual a 1, por consiguiente se obtiene lo mostrado en la Figura 3.13:

Figura 3.13 Diagrama de factorización para el Método de Crout

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Fuente: Stremler, 1998, p.89

Entonces la factorización de una matriz por el método de Crout consiste en encontrar dos matrices L y U tales que;

$$A = LU$$

Al tener en cuenta que el sistema de ecuaciones era:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Pero si $A = LU$

Por lo tanto $LU\vec{x} = \vec{b}$

Donde sí se multiplica a ambos miembros de la igualdad por L^{-1} resulta:

$$U\vec{x} = L^{-1}\vec{b} = \vec{y}$$

Entonces si se toma únicamente estos dos miembros $L^{-1}\vec{b} = \vec{y}$ y se multiplica por L y esto resulta $\vec{b} = L\vec{z}$, en donde se obtiene los valores de \vec{y} y con estos valores se resuelve la igualdad: $U\vec{x} = \vec{y}$ y de esta manera se llega a obtener las incógnitas de \vec{x} .

3.5.1 Análisis para el método de Crout.

El método de Crout es un método de factorización de matrices por el medio del cual se puede encontrar solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para poder realizar este método en primera instancia se debe observar que en la matriz el primer término de la diagonal principal sea distinto de 0, caso contrario se tendría que evaluar una división para 0 y esto traería consigo varios errores, así también se debe observar que la matriz sea cuadrada para que el sistema no sea inconsistente.

3.5.2 Desarrollo didáctico del método de Crout.

Se muestra a continuación la resolución con un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 para luego con estas ecuaciones desarrollar una solución para un sistema de ecuaciones lineales de cualquier orden.

Tabla 3.11 Sistema matricial 3x3 de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de Crout con el fin de formar matrices LU, recordando que la matriz U tiene los elementos principales de la diagonal igual a 1, entonces la factorización en este caso sería:

Tabla 3.12 Nomenclatura factorización LU para un sistema 3x3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces resolviendo el sistema matricial aplicando sumas, restas y multiplicaciones se obtiene las siguientes ecuaciones generales:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= l_1 \times 1 \rightarrow a_{11} = l_1 \\
a_{12} &= l_1 \times u_1 \rightarrow u_1 = \frac{a_{12}}{l_1} \\
a_{13} &= l_1 \times u_2 \rightarrow u_2 = \frac{a_{13}}{l_1} \\
a_{21} &= l_2 \times 1 \rightarrow a_{21} = l_2 \\
a_{22} &= l_2 \times u_1 + l_3 \rightarrow l_3 = a_{22} - l_2 \times u_1 \\
a_{23} &= l_2 \times u_2 + l_3 \times u_3 \rightarrow u_3 = \frac{a_{23} - l_2 \times u_2}{l_3} \\
a_{31} &= l_4 \times 1 \rightarrow a_{31} = l_4 \\
a_{32} &= l_4 \times u_1 + l_5 \rightarrow l_5 = a_{32} - l_4 \times u_1 \\
a_{33} &= l_4 \times u_2 + l_5 \times u_3 + l_6 \rightarrow l_6 = a_{33} - l_4 \times u_2 - l_5 \times u_3
\end{aligned}$$

De estas ecuaciones se puede deducir una ecuación general o algoritmo para cualquier elemento L_{ij} y U_{ij} .

$$\begin{aligned}
1 &\leq j < n \\
l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} * u_{kj} \quad ; \quad j \leq i \leq n \\
u_{ij} &= \frac{(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} * u_{ki})}{l_{jj}} \quad ; \quad j + 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

3.5.3 Resolución de las ecuaciones del modelo experimental usando el Método de Crout.

Como ya se obtuvo anteriormente el sistema de ecuaciones de 5 incógnitas y usando las aplicaciones de Excel se resolvió y se halló las temperaturas, ahora se usará paso a paso el Método de Crout para hallar estas 5 incógnitas ya planteadas en el sistema de ecuaciones.

Sí se aplica las matrices ya construidas anteriormente y partiendo del principio de $A\vec{x} = \vec{b}$ se forma el siguiente sistema matricial.

Tabla 3.13 Sistema matricial para la solución experimental mediante el método de Crout

$$\begin{pmatrix} -2,0008333 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2,0008333 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2,0008333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2,0008333 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,0004167 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200,02083 \\ -0,02083 \\ -0,02083 \\ -0,02083 \\ -0,010417 \end{pmatrix}$$

Ahora se construye tanto la matriz L y la matriz U a partir de $A = LU$ (considerar que la matriz superior U tiene todos sus elementos iguales a 1).

Tabla 3.14 Nomenclatura del sistema matricial 5x5 para el Método de Crout

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 0 & 0 \\ l_7 & l_8 & l_9 & l_{10} & 0 \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 0 & 0 & 1 & u_8 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabla 3.15 Reemplazo de la matriz A para la factorización LU

$$\begin{pmatrix} -2,0008333 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2,0008333 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2,0008333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2,0008333 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,0004167 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 0 & 0 \\ l_7 & l_8 & l_9 & l_{10} & 0 \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 0 & 0 & 1 & u_8 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al aplicar la multiplicación de matrices se irá hallando cada término de la matriz L y cada término de la matriz U.

$$l_1 = a_{11}$$

$$l_1 = -2.0008333$$

$$l_1 u_1 = a_{12}$$

$$u_1 = \frac{a_{12}}{l_1}$$

$$u_1 = -0.4998$$

$$l_1 u_2 = a_{13}$$

$$u_2 = \frac{a_{13}}{l_1}$$

$$u_2 = 0$$

$$l_1 u_3 = a_{14}$$

$$u_3 = \frac{a_{14}}{l_1}$$

$$u_3 = 0$$

$$l_1 u_4 = a_{15}$$

$$u_4 = \frac{a_{15}}{l_1}$$

$$u_4 = 0$$

$$l_2 = a_{21}$$

$$l_2 = 1$$

$$l_2 u_1 + l_3 = a_{22}$$

$$l_3 = a_{22} - l_2 u_1$$

$$l_3 = -1.5010$$

$$l_2 u_2 + l_3 u_5 = a_{23}$$

$$u_5 = \frac{a_{23} - l_2 u_2}{l_3}$$

$$u_5 = -0.6662$$

$$l_2u_3 + l_3u_6 = a_{24}$$

$$u_6 = \frac{a_{24} - l_2u_3}{l_3}$$

$$u_6 = 0$$

$$l_2u_4 + l_3u_7 = a_{25}$$

$$u_7 = \frac{a_{25} - l_2u_4}{l_3}$$

$$u_7 = 0$$

$$l_4 = a_{31}$$

$$l_4 = 0$$

$$l_4u_1 + l_5 = a_{32}$$

$$l_5 = a_{32} - l_4u_1$$

$$l_5 = 1$$

$$l_4u_2 + l_5u_5 + l_6 = a_{33}$$

$$l_6 = a_{33} - l_4u_2 - l_5u_5$$

$$l_6 = -1.3346$$

$$l_4u_3 + l_5u_6 + l_6u_8 = a_{34}$$

$$u_8 = \frac{a_{34} - l_5u_6 - l_4u_3}{l_6}$$

$$u_8 = -0.7493$$

$$l_4u_4 + l_5u_7 + l_6u_9 = a_{35}$$

$$u_9 = \frac{a_{35} - l_4u_4 - l_5u_7}{l_6}$$

$$u_9 = 0$$

$$l_7 = a_{41}$$

$$l_7 = 0$$

$$l_7 u_1 + l_8 = a_{42}$$

$$l_8 = a_{42} - l_7 u_1$$

$$l_8 = 0$$

$$l_7 u_2 + l_8 u_5 + l_9 = a_{43}$$

$$l_9 = a_{43} - l_7 u_2 - l_8 u_5$$

$$l_9 = 1$$

$$l_7 u_3 + l_8 u_6 + l_9 u_8 + l_{10} = a_{44}$$

$$l_{10} = a_{44} - l_7 u_3 - l_8 u_6 - l_9 u_8$$

$$l_{10} = -1.2515$$

$$l_7 u_4 + l_8 u_7 + l_9 u_9 + l_{10} u_{10} = a_{45}$$

$$u_{10} = \frac{a_{45} - l_7 u_4 - l_8 u_7 - l_9 u_9}{l_{10}}$$

$$u_{10} = -0.7990$$

$$l_{11} = a_{51}$$

$$l_{11} = 0$$

$$l_{11} u_1 + l_{12} = a_{52}$$

$$l_{12} = a_{52} - l_{11} u_1$$

$$l_{12} = 0$$

$$l_{11} u_2 + l_{12} u_5 + l_{13} = a_{53}$$

$$l_{13} = a_{53} - l_{11} u_2 - l_{12} u_5$$

$$l_{13} = 0$$

$$l_{11} u_3 + l_{12} u_5 + l_{13} u_8 + l_{14} = a_{54}$$

$$l_{14} = a_{54} - l_{11} u_3 - l_{12} u_5 - l_{13} u_8$$

$$l_{14} = 1$$

$$l_{11}u_4 + l_{12}u_7 + l_{13}u_9 + l_{14}u_{10} + l_{15} = a_{55}$$

$$l_{15} = a_{55} - l_{11}u_4 - l_{12}u_7 - l_{13}u_9 - l_{14}u_{10}$$

$$l_{15} = -0.2014$$

Se organiza los valores de L y U y se obtiene lo siguiente:

Tabla 3.16 Valores de L y U después de la factorización

VALORES MATRIZ L	VALORES MATRIZ U
$l_1 = -2,0008333$	$u_1 = -0,4998$
$l_2 = 1$	$u_2 = 0$
$l_3 = -1,501$	$u_3 = 0$
$l_4 = 0$	$u_4 = 0$
$l_5 = 1$	$u_5 = -0,6662$
$l_6 = -1,3346$	$u_6 = 0$
$l_7 = 0$	$u_7 = 0$
$l_8 = 0$	$u_8 = -0,7493$
$l_9 = 1$	$u_9 = 0$
$l_{10} = -1,2515$	$u_{10} = -0,799$
$l_{11} = 0$	
$l_{12} = 0$	
$l_{13} = 0$	
$l_{14} = 1$	
$l_{15} = -0,2014$	

Tabla 3.17 Matrices L y U

$$L = \begin{pmatrix} -2,000833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1,501 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,3346 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,2515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2014 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -0,4998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6662 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,7493 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,799 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso en relación al método de Crout es aplicar la condición:

$$L\vec{y} = \vec{b}$$

Se forma el sistema con las matrices respectivas:

Tabla 3.18 Nomenclatura para $L\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 0 & 0 \\ l_7 & l_8 & l_9 & l_{10} & 0 \\ l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

Tabla 3.19 Multiplicación para $L\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} -2,000833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1,501 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,3346 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,2515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2014 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200,02083 \\ -0,02083 \\ -0,02083 \\ -0,02083 \\ -0,010417 \end{pmatrix}$$

Sí se aplica las propiedades de suma, resta y multiplicación se encuentra los valores de \vec{y} .

$$l_1 y_1 = b_1$$

$$y_1 = \frac{b_1}{l_1}$$

$$y_1 = 99.9688$$

$$l_2 y_1 + l_3 y_2 = b_2$$

$$y_2 = \frac{b_2 - l_2 y_1}{l_3}$$

$$y_2 = 66.5153$$

$$l_4 y_1 + l_5 y_2 + l_6 y_3 = b_3$$

$$y_3 = \frac{b_3 - l_4 y_1 - l_5 y_2}{l_6}$$

$$y_3 = 50.0701$$

$$l_7 y_1 + l_8 y_2 + l_9 y_3 + l_{10} y_4 = b_4$$

$$y_4 = \frac{b_4 - l_7 y_1 - l_8 y_2 - l_9 y_3}{l_{10}}$$

$$y_4 = 40.1745$$

$$l_{11} y_1 + l_{12} y_2 + l_{13} y_3 + l_{14} y_4 + l_{15} y_5 = b_5$$

$$y_5 = \frac{b_5 - l_{11} y_1 - l_{12} y_2 - l_{13} y_3 - l_{14} y_4}{l_{15}}$$

$$y_5 = 199.5280$$

De estas operaciones se tiene como resultado el siguiente vector \vec{y} :

Tabla 3.20 Resultados de vector \vec{y}

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 99,9688 \\ 66,6153 \\ 50,0701 \\ 40,1745 \\ 199,528 \end{pmatrix}$$

Sí se continúa con los pasos del método de Crout se aplica la siguiente condición:

$$U\vec{x} = \vec{y}$$

Tabla 3.21 Nomenclatura para $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 0 & 0 & 1 & u_8 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Tabla 3.22 Multiplicación $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0,4998 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6662 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,7493 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,799 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99,9688 \\ 66,6153 \\ 50,0701 \\ 40,1745 \\ 199,528 \end{pmatrix}$$

$$T_5 = y_5$$

$$T_5 = 199.5280$$

$$T_4 + u_{10}T_5 = y_4$$

$$T_4 = y_4 - u_{10}T_5$$

$$T_4 = 199.5974$$

$$T_3 + u_8T_4 = y_3$$

$$T_3 = y_3 - u_8T_4$$

$$T_3 = 199.6284$$

$$T_2 + u_5T_3 = y_2$$

$$T_2 = y_2 - u_5T_3$$

$$T_2 = 199.6284$$

$$T_1 + u_1T_2 = y_1$$

$$T_1 = y_1 - u_1T_2$$

$$T_1 = 199.6284$$

Una vez utilizadas las propiedades y procedimientos del método de Crout para obtener las 5 temperaturas del modelo experimental expuesto, se halla el rendimiento para después evaluar resultados dados por Excel, Método de Crout y MATLAB.

Tabla 3.23 Valores de Temperaturas usando Método de Crout

VALORES DE TEMPERATURAS		
T ₁	=	199,7528
T ₂	=	199,6477
T ₃	=	199,6284
T ₄	=	199,5974
T ₅	=	199,528

$$\dot{Q}_{aleta} = \sum_{m=0}^5 \dot{Q}_{elemento,m} = \sum_{m=0}^5 hA_{convección,m}(T_m - T_{\infty})$$

$$\dot{Q}_{aleta} = hA_{nodo\ 1\ y\ 5}[(T_0 - T_{\infty}) + 2(T_1 - T_{\infty}) + 2(T_2 - T_{\infty}) + 2(T_3 - T_{\infty}) + 2(T_4 - T_{\infty}) + (T_5 - T_{\infty})]^{\circ}\text{C}$$

$$\dot{Q}_{aleta} = hw\Delta x[T_0 + 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + T_5 - 10T_{\infty}]^{\circ}\text{C}$$

$$\dot{Q}_{aleta} = 15 \frac{W}{m^2^{\circ}\text{C}} \times 1m \times 0.01m[200^{\circ}\text{C} + 2(798.6263^{\circ}\text{C}) + 199.528^{\circ}\text{C} - 250^{\circ}\text{C}]$$

$$\dot{Q}_{aleta} = 0.15W(1746.7808)$$

$$\dot{Q}_{aleta} = 262.01709W$$

Ya se sabe que el $\dot{Q}_{m\acute{a}ximo} = 262.50W$;

Entonces la eficiencia de la aleta se determina a partir de:

$$n_{aleta} = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{\dot{Q}_{m\acute{a}ximo}} \quad \textbf{Ecuaci3n 3-27}$$

$$n_{aleta} = \frac{262.01709W}{262.50W} = 0.99816$$

CAPÍTULO 4

SIMULINK DE MATLAB

4.1 MATLAB

4.1.1 ¿Qué es MATLAB'

MATLAB es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio, en otras palabras es un laboratorio de matrices. (Balmer, 1997, p.8)

Es decir MATLAB es un entorno de computación y desarrollo de aplicaciones totalmente orientado para llevar a cabo proyectos en donde se encuentren implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización de los mismos. MATLAB contiene análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señal y visualización grafica en un entorno completo donde los problemas y sus soluciones son expresados del mismo modo en que se escribirían textualmente. (Balmer, 1997, p.9)

MATLAB dispone de una amplia gama de programas de apoyo denominados Toolbox que extienden significativamente el número de funciones incorporadas en el programa principal. Estos Toolboxes cubren en la actualidad prácticamente casi todas las áreas principales en el mundo de la ingeniería y la simulación, destacando entre ellos el Toolbox de proceso de imágenes, señal, control robusto, estadística, análisis financiero, matemáticas simbólicas, lógica difusa, identificación de sistemas, simulación de sistemas dinámicos, entre otros, es un entorno de cálculo técnico, que se ha convertido en estándar de la industria, con capacidades no superadas en computación y visualización. (Balmer, 1997, p.29)

En el presente documento el tema principal es la simulación usando SIMULINK de MATLAB, el cual ayuda de una manera ágil y eficaz el cálculo del problema ya expuesto, usando diagrama de bloques como principal modelo.

4.1.2 Aplicaciones de MATLAB

Las aplicaciones son programas independientes de MATLAB con interfaz propio que automatizan una tarea o cálculo. Estas normalmente contienen controles tales como menús, botones y controles deslizantes. Muchos productos de MATLAB como el ajuste de curvas, caja de herramientas, caja de herramientas de procesamiento de señales y Control System Toolbox, incluyen aplicaciones con interfaces de usuario personalizadas que pueden ser configuradas de manera útil y de fácil entendimiento para otras personas.

4.1.3 Aplicación GUIDE de MATLAB

GUIDE es un entorno de programación visual disponible en MATLAB para realizar y ejecutar programas que necesiten ingreso continuo de datos. (Ver Anexo 1).

4.2 SIMULINK.

4.2.1 ¿Qué es SIMULINK?

SIMULINK es una herramienta de gran utilidad para la simulación de sistemas dinámicos. Principalmente, se trata de un entorno de trabajo gráfico, en el que se especifican las partes de un sistema y su interconexión en forma de diagrama de bloques. (Stremmler, 1998, p.29)

Además de las capacidades de simulación de las que está dotado SIMULINK, conviene destacar que contiene cómodas utilidades de visualización y almacenamiento de simulación.

SIMULINK trabaja como su principal característica con diagramas de bloques, los cuales minimizan el desarrollo de las operaciones algebraicas, lineales, integrales, entre otras, ya que estos se encargan directamente de tener almacenados las diferentes codificación de desarrollo, es decir cada bloque contiene la información necesaria para realizar las diferentes operaciones de cálculo. (Stremmer, 1998, p.29)

4.2.2 ¿Qué hace SIMULINK?

SIMULINK permite definir de una forma lógica las diferentes etapas del proceso de diseño en el algoritmo de DSP y el flujo de datos entre ellas. Cada bloque puede representar un solo elemento del proceso o bien un subsistema, además de ser fácilmente modificable para reflejar un cambio en el algoritmo o en el enfoque del diseño. Estos diagramas de bloques permiten una descripción de alto nivel del sistema, además de ser fácilmente modificables con la finalidad de conseguir el comportamiento deseado, es decir, proporcionan una estructura jerárquica para evaluar el comportamiento de algoritmos alternativos bajo diferentes condiciones de funcionamiento. (Balmer, 1997, p. 101)

SIMULINK incluye muchas características para el análisis detallado de sistemas. Las capacidades principales incluyen: linealización, determinación de puntos de equilibrio, animación, optimización de los parámetros y análisis paramétrico. (Stremmer, 1998, p.33)

4.2.3 ¿Qué son los diagramas de bloques?

Un diagrama de bloques es la representación gráfica del funcionamiento interno de un sistema, que se hace mediante bloques y sus relaciones, y que, además, definen la organización de todo el proceso interno, sus entradas y salidas. (Balmer, 1997, p. 110)

Un diagrama de bloques puede ser usado en el ámbito industrial y matemático, en este caso se usará en la práctica matemática.

El diagrama de bloques de un modelo matemático es utilizado para representar el control de sistemas físicos (o reales) mediante un modelo matemático, en el cual, intervienen gran cantidad de variables que se relacionan en todo el proceso de producción. El modelo matemático que representa un sistema físico de alguna complejidad, conlleva a la abstracción entre la relación de cada una de sus partes, y que conducen a la pérdida del concepto global. En ingeniería de control, se han desarrollado una representación gráfica de las partes de un sistema y sus interacciones. Luego de la representación gráfica del modelo matemático, se puede encontrar la relación entre la entrada y la salida del proceso del sistema. (Balmer, 1997, p. 110)

4.3 Configuración de SIMULINK para el ejemplo experimental

Para la simulación en SIMULINK del ejemplo experimental planteado y que ha sido resuelto mediante diferencias finitas y evaluado mediante el Método de Crout y Microsoft Excel se usará diferentes aplicaciones que están dentro del Toolbox de SIMULINK, cada una de estas aplicaciones cumple una función específica y que solo se colocará los parámetros de simulación, para esto se ha adjuntado el Anexo 2, el cual muestra y explica de manera clara, cada una de las aplicaciones usadas para la elaboración del respectivo programa de simulación.

4.3.1 Procedimiento de simulación en SIMULINK

- Primero se buscará el icono de MATLAB y se hará clic para abrir el programa. (Ver Figura 4.1)

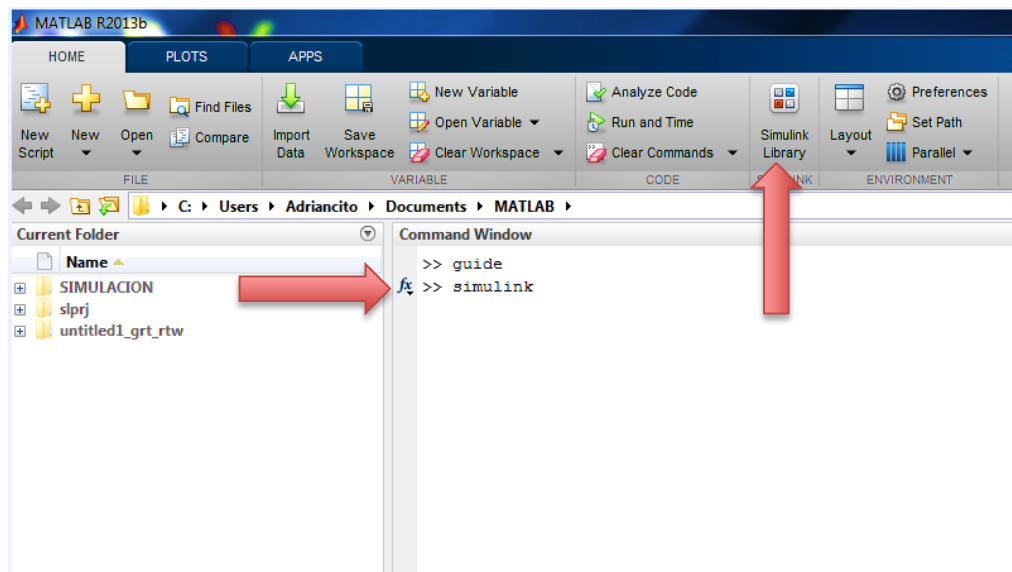
Figura 4.1 Icono de MATLAB mostrado en el escritorio de una PC



Fuente: www.matlab.com

- Al abrirse el programa aparece una pantalla en blanco, donde se debe escribir la palabra “simulink”, este es un comando que le abre directamente a la pantalla de SIMULINK. También existe la alternativa de hacer clic en el icono “Simulink Library” que se encuentra en la barra de home de MATLAB. (Figura 4.2)

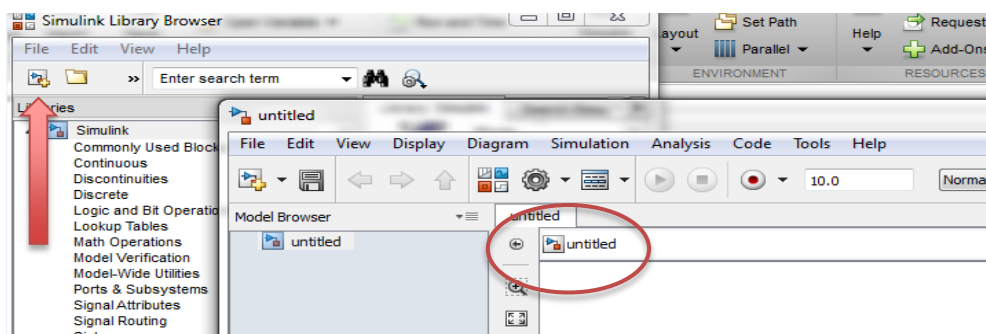
Figura 4.2 Comando “simulink” o icono “Simulink Library” para abrir SIMULINK



Fuente: Software MATLAB

- Una vez abierta la pantalla de SIMULINK, se hace clic en el icono de “New Model”, el cual abrirá una nueva hoja en blanco que por defecto estará llamada “untitled”, esta hoja en blanco obtenida será el espacio para la modelación de la simulación. (Ver Figura 4.3)

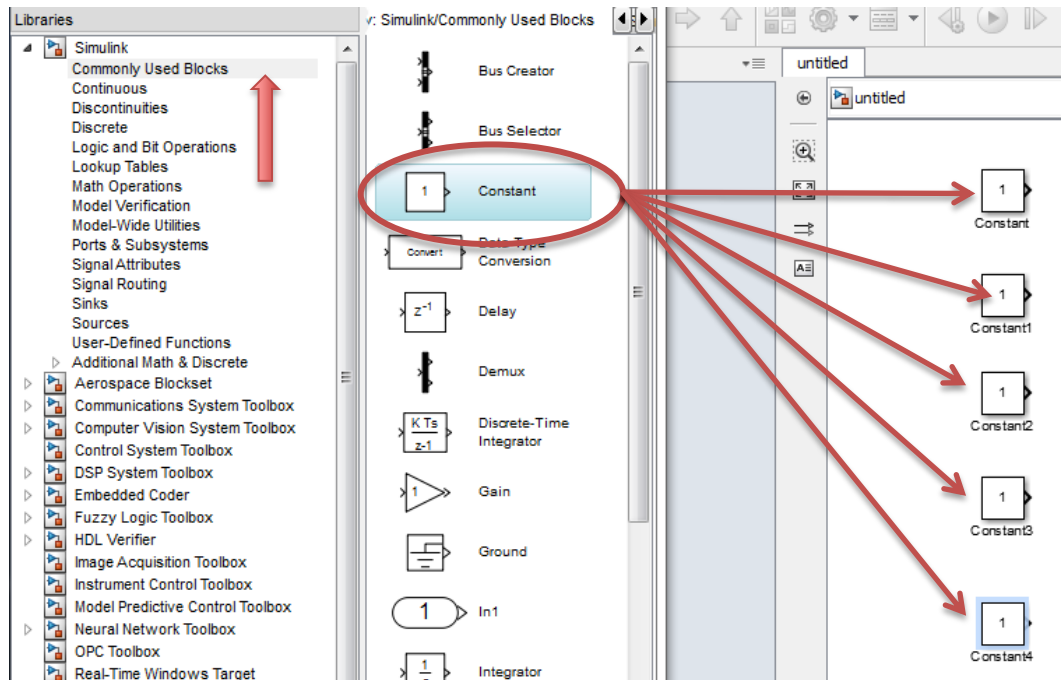
Figura 4.3 “New Model” – Nuevo Modelo para trabajar en SIMULINK



Fuente: Software MATLAB

- Se empieza a modelar la ecuación general de la transferencia de calor para aletas rectangulares. (Ver Ecuación 2-15)
- En el menú “Simulink” se hace clic en el submenú “Commonly Used Blocks”, donde está el bloque “Constant”, se arrastrará 5 de estos bloques. (Ver Figura 4.4)

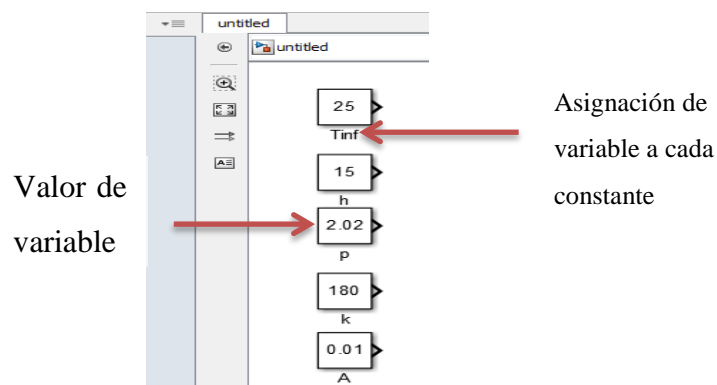
Figura 4.4 Asignación de constantes



Fuente: Software MATLAB

- A cada constante se le asigna el nombre de las variables a usar, haciendo doble clic en “Constant1, ... , 4 respectivamente. (Ver Figura 4.5)

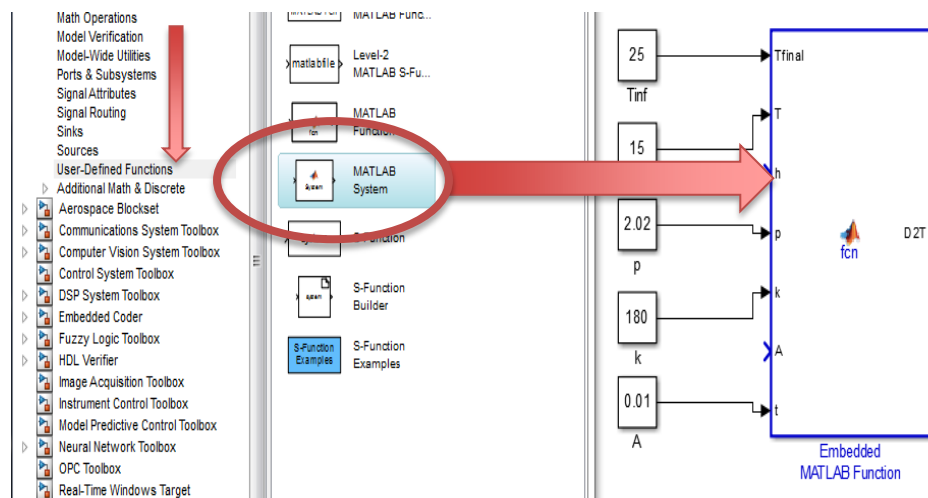
Figura 4.5 Asignación de nombres de variables a cada constante



Fuente: Software MATLAB

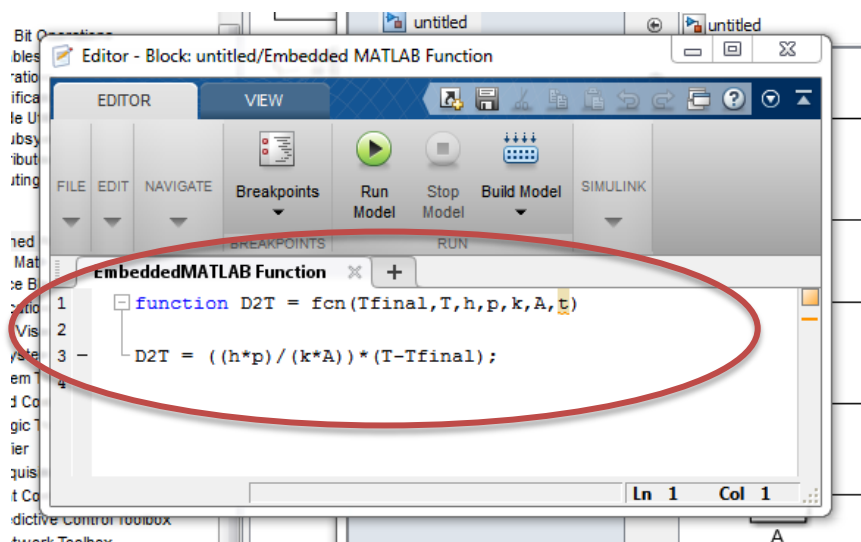
- Cuando ya se haya dado nombre y valor a cada variable (T_{inf} , h , p , k , y A), en el menú simulink se hace clic en el submenú “User Defined Functions”, donde estás el bloque “MATLAB Function”, se arrastra un bloque hacia el área de trabajo, haciendo doble clic en este bloque una vez que ya fue ingresado, se abre una pantalla donde se definirá todos las entradas de las constantes y la ecuación a ser resulta, que en este caso viene a ser la Ecuación 2-15. (Ver Figura 4.6 y Figura 4.7)

Figura 4.6 Asignación de bloque Embedded MATLAB Function



Fuente: Software MATLAB

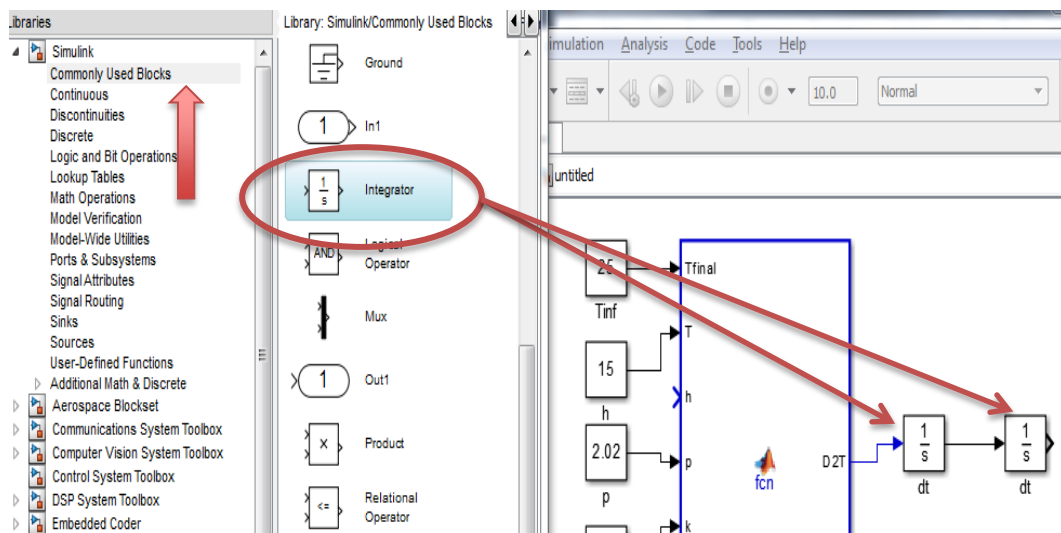
Figura 4.7 Ingreso de fórmula en Embedded MATLAB Function



Fuente: Software MATLAB

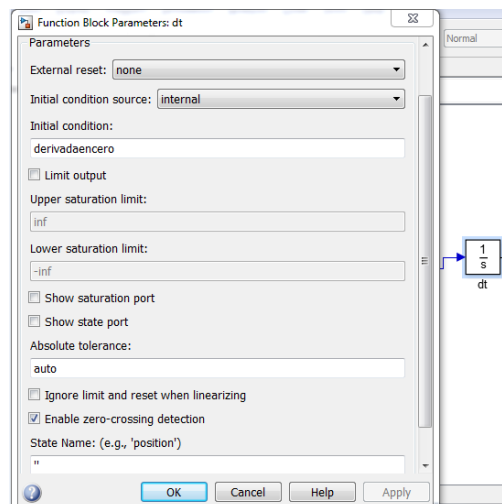
- En el menú simulink se hace clic en el submenú “Commonly Used Blocks”, ahí está un bloque llamado “Integrator”, el cual como su nombre en inglés lo indica hará la función de integración en el sistema de bloques. Se necesitan dos de estos bloques, ya que la Ecuación 2-15 posee una doble integral. Se hace doble clic en el bloque y aparece una ventana donde se ingresaran los parámetros de integración correspondientes a cada caso. (Ver Figura 4.8 y Figura 4.9)

Figura 4.8 Ingreso de bloques de integración “Integrator”



Fuente: Software MATLAB

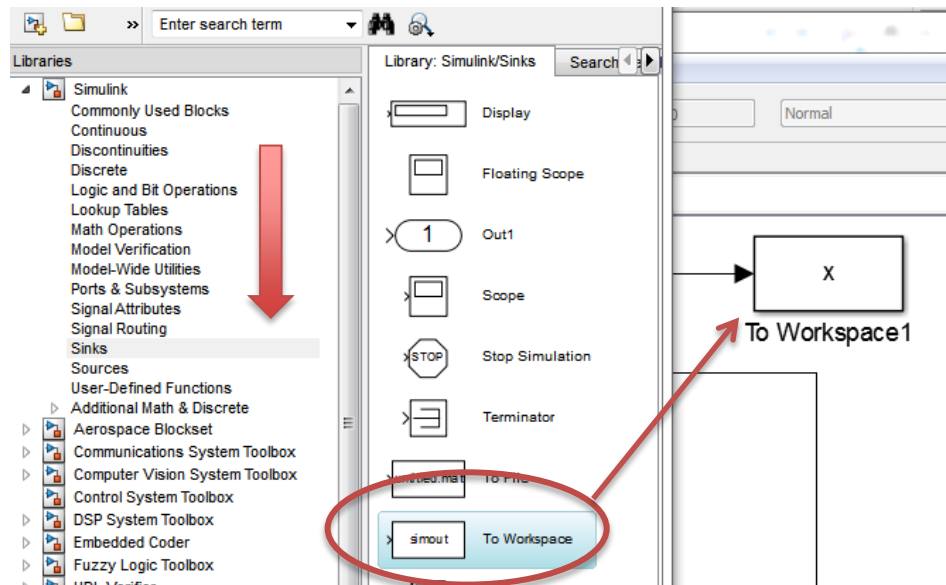
Figura 4.9 Asignación de parámetros de cada integrador



Fuente: Software MATLAB

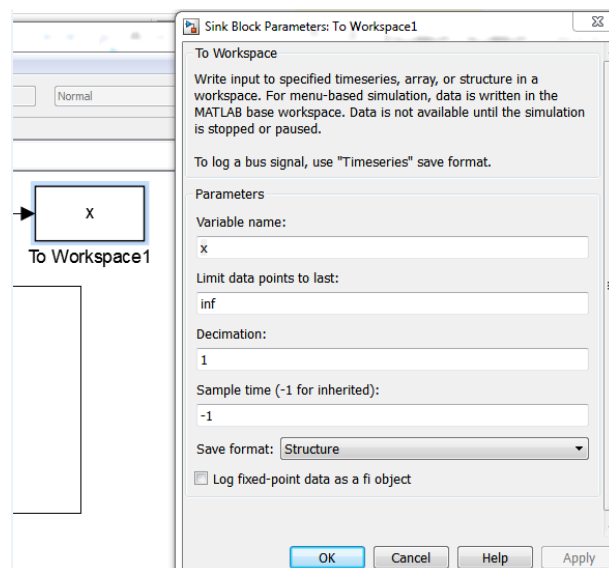
- Se regresa al menú simulink y haciendo doble clic en el submenú “Sinks” está el bloque “To Workspace”, se escoge 2 de estos bloques, los cuales cumplirán la función de mandar la señal a la hoja de cálculo de MATLAB. Con doble clic sobre el bloque se abrirá la ventana donde se especificarán los parámetros de resolución y señal (Ver Figura 4.10 y Figura 4.11)

Figura 4.10 Ingreso de bloque “To Workspace”



Fuente: Software MATLAB

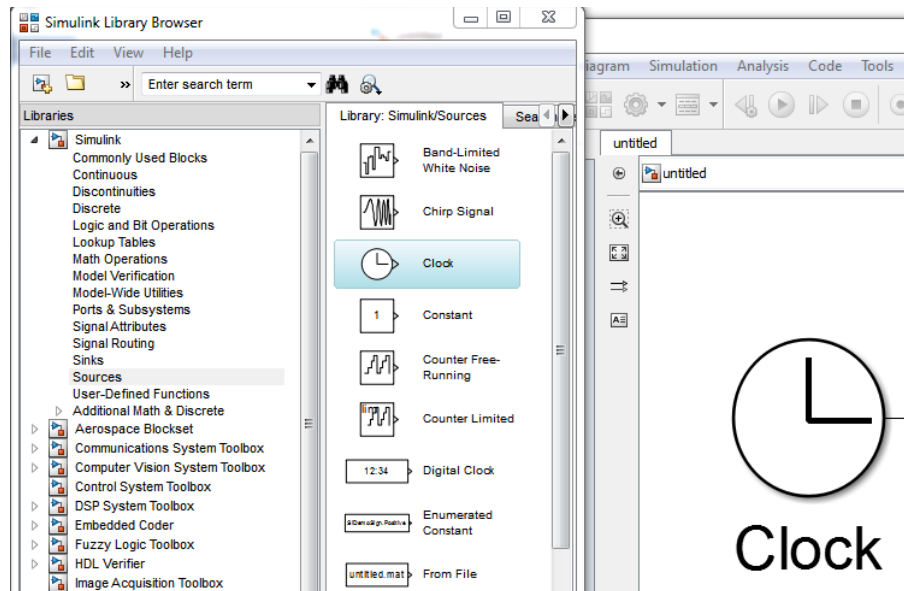
Figura 4.11 Asignación de parámetros del bloque “To Workspace”



Fuente: Software MATLAB

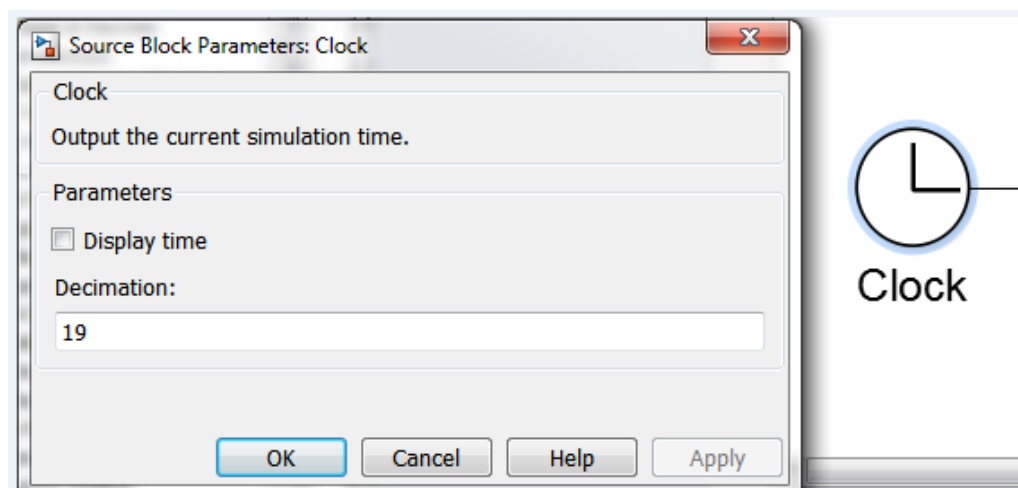
- Dirigiéndose una vez más al menú de simulink se hace doble clic en el submenú “Sources” y se selecciona el bloque llamado “Clock”, el cual ayudará con la integración en función al tiempo. (Ver Figura 4.12)

Figura 4.12 Ingreso de bloque “Clock”



Fuente: Software MATLAB

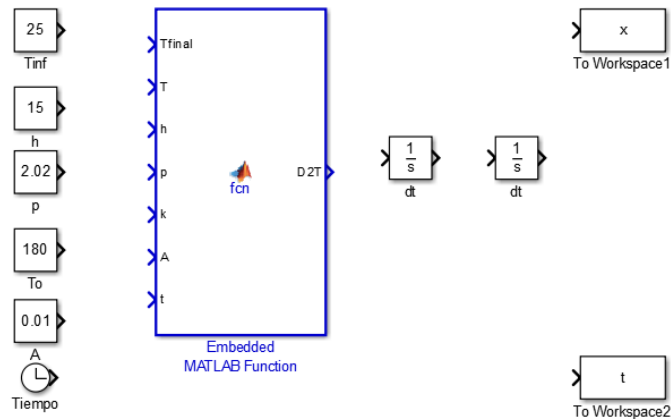
Figura 4.13 Asignación de parámetros del bloque “Clock”



Fuente: Software MATLAB

- Cuando ya se tenga todos los bloques en la hoja de trabajo, se debe hacer las conexiones correctas, para que el sistema tenga congruencia. (Ver Figura 4.14)

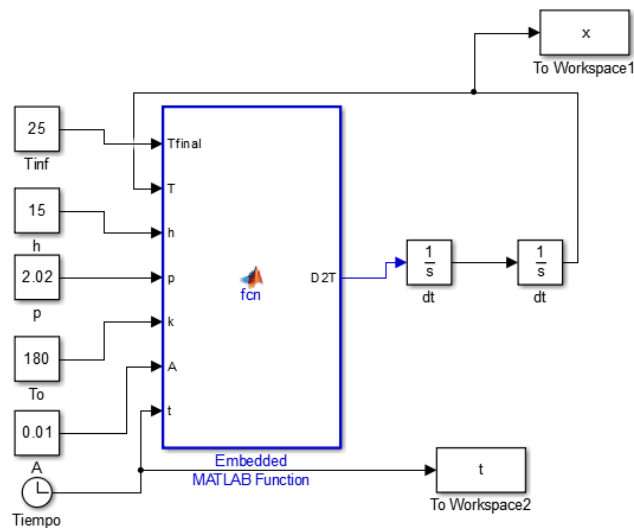
Figura 4.14 Diagrama de bloques sin conexiones



Fuente: Software MATLAB

- Ya que se han hecho las respectivas conexiones, se obtiene el diagrama de bloques final de la siguiente manera (es necesario recordar que después de cada proceso de formación del diagrama de bloques se debe ir guardando el progreso). (Ver Figura 4.15)

Figura 4.15 Diagrama de bloques final



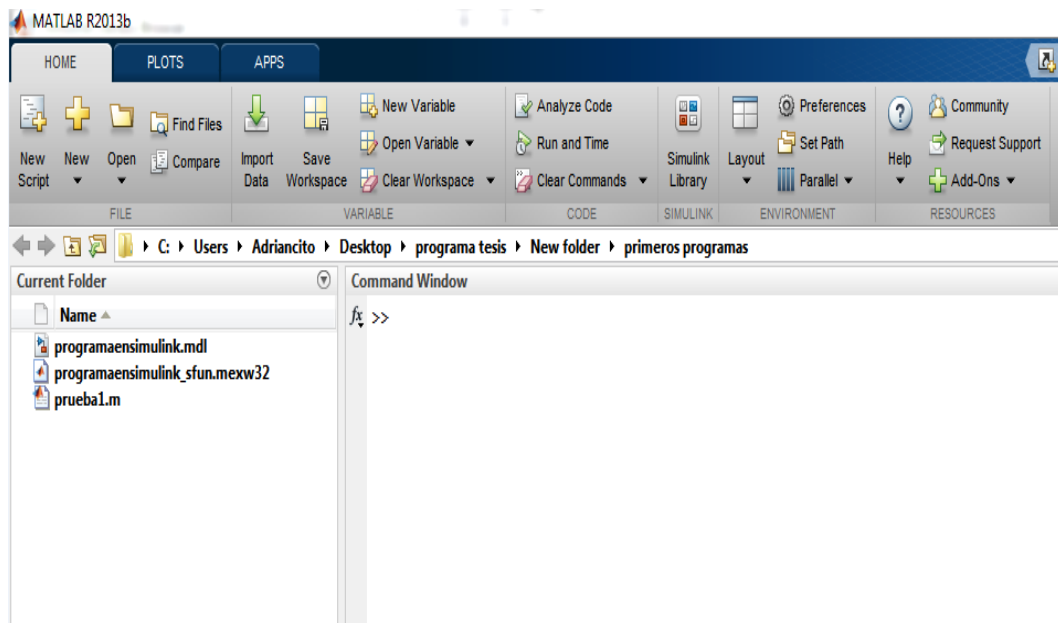
Fuente: Software MATLAB

- Si se recuerda que el bloque “To Workspace” iba a servir como conexión o señal a la hoja de cálculo de MATLAB, ahora se debe realizar una programación para obtener los resultados requeridos de la ecuación general

de la transferencia de calor para aletas, tomando en cuenta que la hoja de cálculo de MATLAB ya trabaja con diferencias finitas.

- Se abre MATLAB (ver Figura 4.16), donde hay una hoja de cálculo en blanco, la cual estará destinada para la programación y evaluación mediante gráficos y resultados de la Ecuación 2-15. (Ver Figura 4.16)

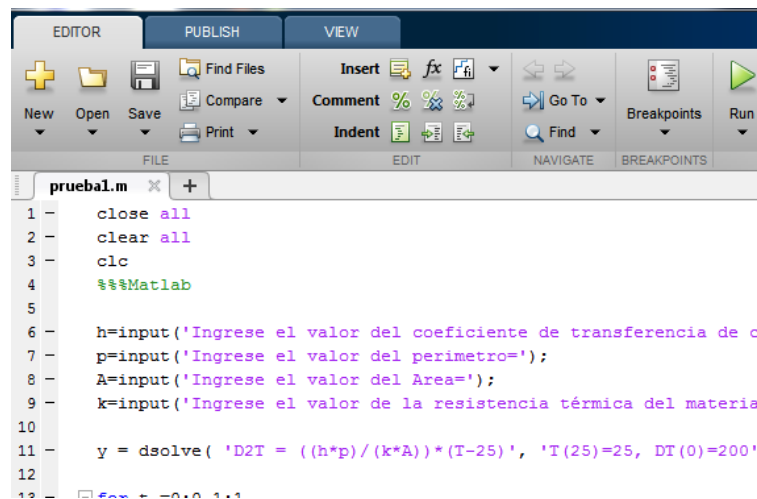
Figura 4.16 Nueva Hoja de Cálculo para programación



Fuente: Software MATLAB

- Después de realizar los respectivos análisis y descifrar los códigos correctos en la hoja de cálculo de MATLAB para la ecuación mencionada, se puede observar como MATLAB ha quedado configurado y conectado con SIMULINK. (Ver Figura 4.17)

Figura 4.17 Muestra de configuración en MATLAB



Fuente: Software MATLAB

- A continuación está la configuración completa de cómo están los códigos del programa para poder visualizar la curva.

```

close all
clear all
clc
%%Matlab

h=input('Ingrese el valor del coeficiente de transferencia de
calor=');
p=input('Ingrese el valor del perimetro=');
A=input('Ingrese el valor del Area=');
k=input('Ingrese el valor de la resistencia térmica del material=');

y = dsolve( 'D2T = ((h*p)/(k*A))*(T-25)', 'T(25)=25, DT(0)=200',
't');

for t =0:0.1:1
    ysalida=eval(y);
    tsalida=t;
    figure (1)
    plot(ysalida,tsalida,'.k','Linewidth',1,'MarkerSize',16)
    xlabel('distancia','fontsize',10,'Color','b')
    ylabel('temperatura','fontsize',10,'Color','r')
    title('Solucion de una ecuacion diferencial de segundo
orden','fontsize',10,'Color','b')
    hold on;
    grid on;
end

%% en simulink
tiempoinicial=0;
tiempofinal=1;
Tcer=25;
derivadaencero=200;

```

```

sim('programaensimulink.mdl')

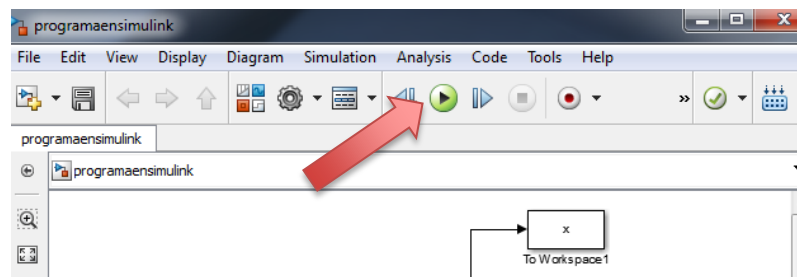
xgrafica=x.signals.values;
tiempografica= t.signals.values;

figure (1)
plot(tiempografica,xgrafica,'b');
hold on;
grid on;
xlabel('tiempo ok')
ylabel('ysalida ok')

```

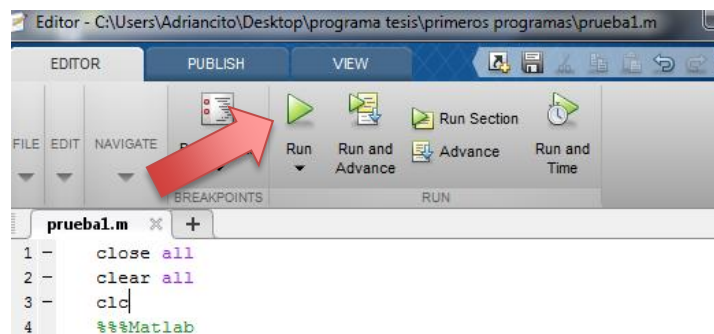
- Puesto que ya se tiene los códigos para el sistema de bloques de SIMULINK, se manda a correr tanto SIMULINK como MATLAB de la siguiente manera. (Ver Figura 4.18 y Figura 4.19)

Figura 4.18 Botón de play para correr el programa de SIMULINK



Fuente: Software MATLAB

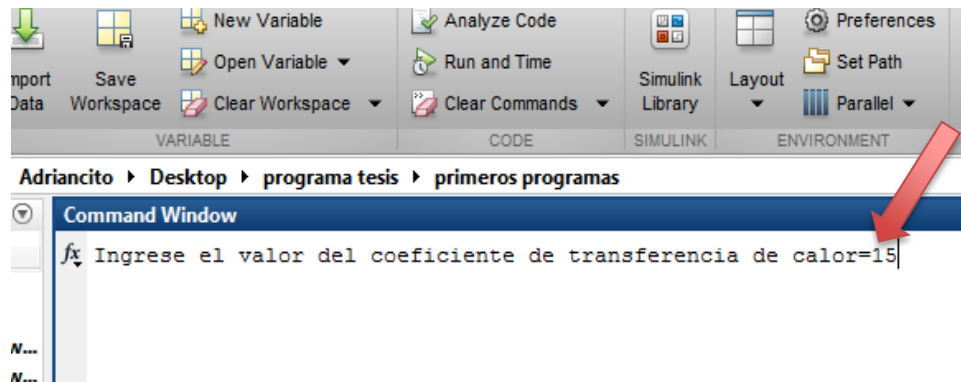
Figura 4.19 Botón de play para correr el programa de MATLAB



Fuente: Software MATLAB

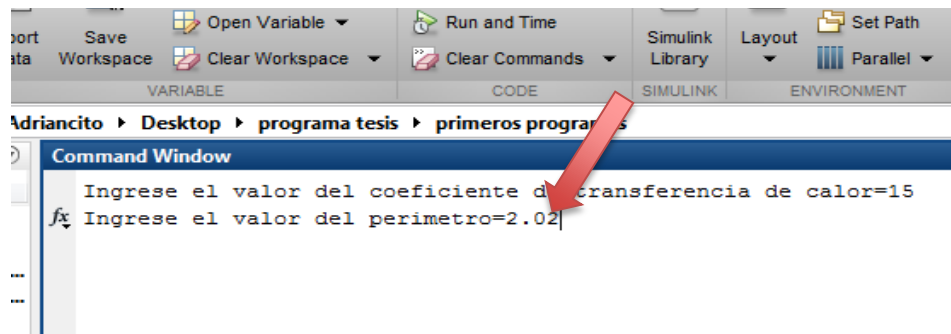
- El programa indicara paso a paso que valores ingresar.

Figura 4.20 Ingreso del valor del coeficiente de transferencia de calor (h)



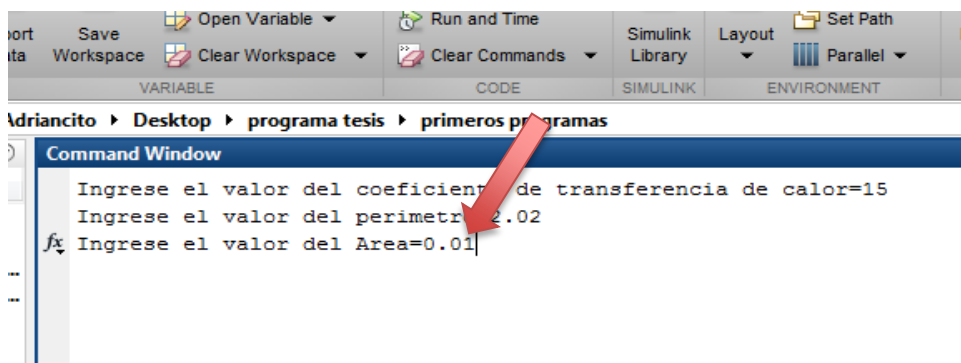
Fuente: Software MATLAB

Figura 4.21 Ingreso del valor del perímetro (p)



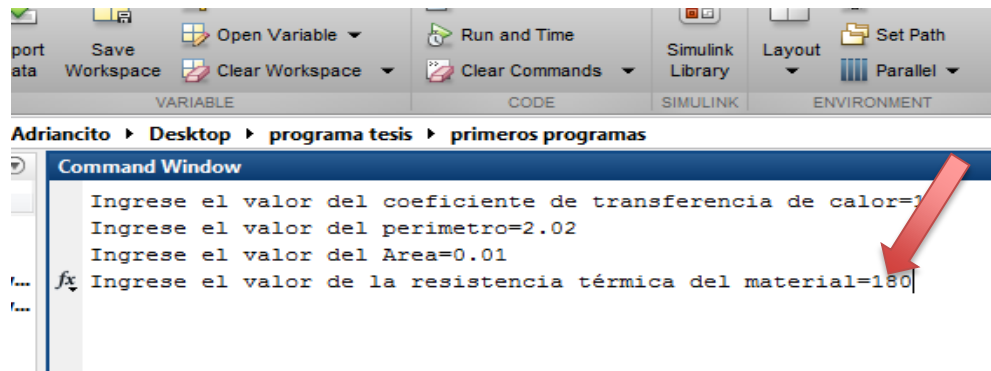
Fuente: Software MATLAB

Figura 4.22 Ingreso del valor del área (A)



Fuente: Software MATLAB

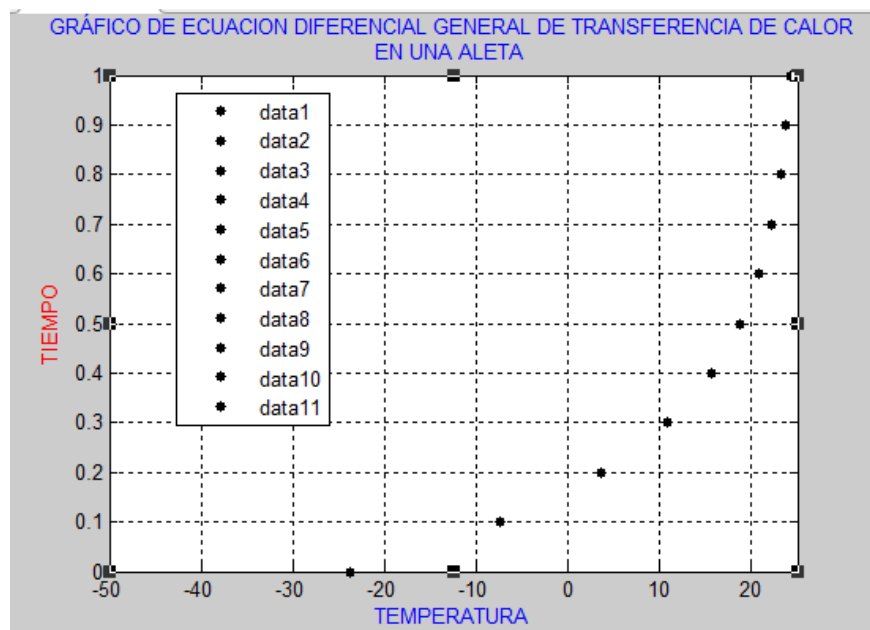
Figura 4.23 Ingreso del valor de la resistencia térmica del material (k)



Fuente: Software MATLAB

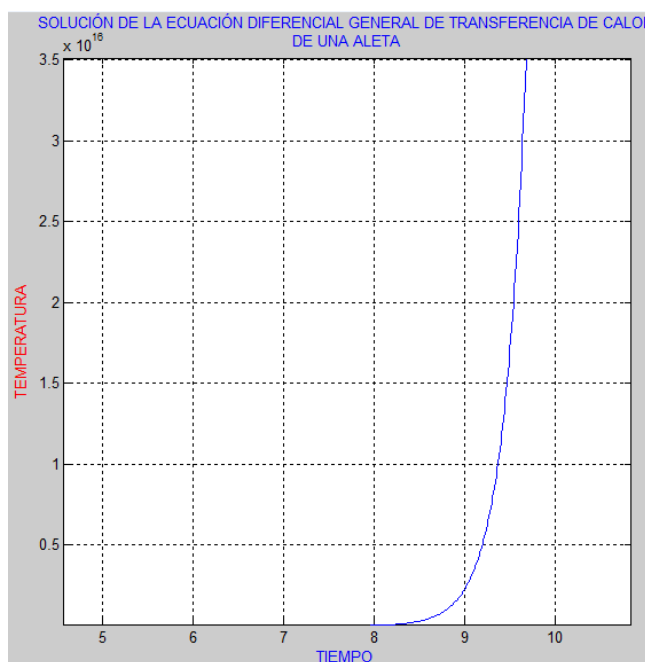
- Una vez ingresados los valores de cada variable que solicitaba la hoja de cálculo, se tiene el gráfico tanto de MATLAB como SIMULINK. (Ver Figura 4.24 y Figura 4.25)

Figura 4.24 Curva de la transferencia de calor general para una aleta desde MATLAB



Fuente: Software MATLAB

Figura 4.25 Curva de la transferencia de calor general de la aleta en MATLAB



Fuente: Software MATLAB

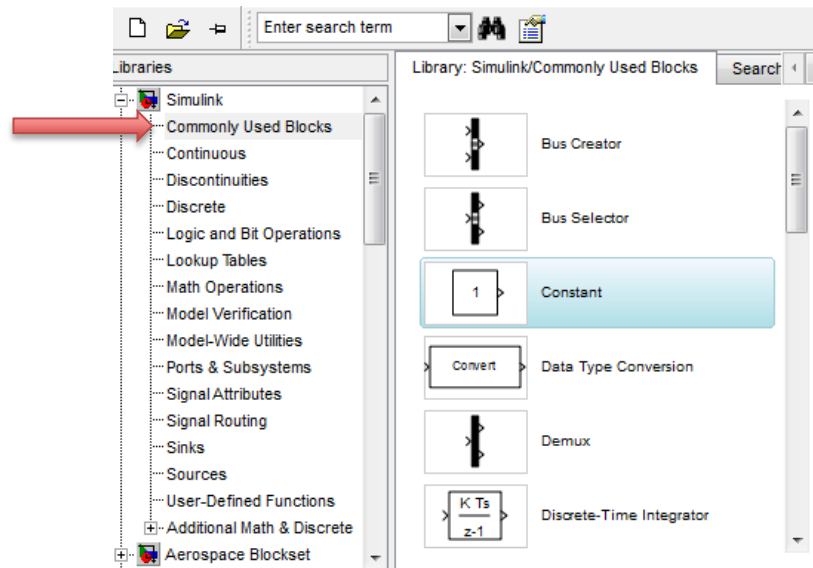
Al analizar los datos obtenidos, es fácil darse cuenta que no se cumple con lo que anteriormente se obtuvo, quizás el análisis muy general no es lo más indicado y esto produce que no sean visibles los resultados que experimentalmente se obtuvo en las diferencias finitas. Por tanto es necesario plantear de otra manera el programa y recodificar para que cumpla con las condiciones con las que el ejemplo ha sido planteado. Por esta razón se explicará detalladamente cómo se ha realizado la reprogramación del diagrama de bloques, obteniendo la curva deseada y con el soporte de una hoja de cálculo en MATLAB.

Se abre el programa de MATLAB y usando la aplicación de SIMULINK como en los gráficos anteriores fue explicado.

- Cuando la aplicación de SIMULINK sea abierta se obtendrá cada uno de los bloques para la configuración de la ecuación, teniendo en cuenta que la aleta a ser aplicada es en relación al caso 2 de la transferencia de calor en superficies extendidas, donde la aleta tiene una sección constante, longitud L y se encuentra aislada en el extremo.

- Se escoge el bloque “CONSTANT” y es llevado a la hoja de trabajo. Este comando se encuentra en la pestaña “COMMONLY USED BLOCKS”

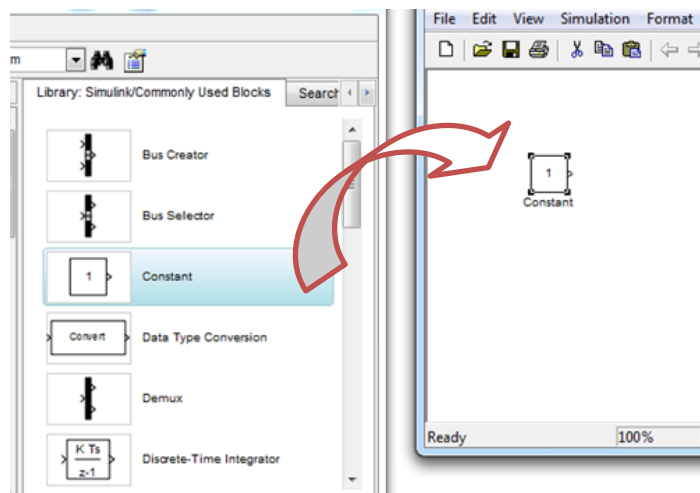
Figura 4.26 Submenú “Commonly Used Blocks” donde se encuentra el bloque “Constant”



Fuente: Software MATLAB

- El bloque “CONSTANT” genera un valor constante real o complejo. La salida del bloque tiene las mismas dimensiones y elementos como el parámetro de valor constante. (Ver Figura 4.26 y Figura 4.27)

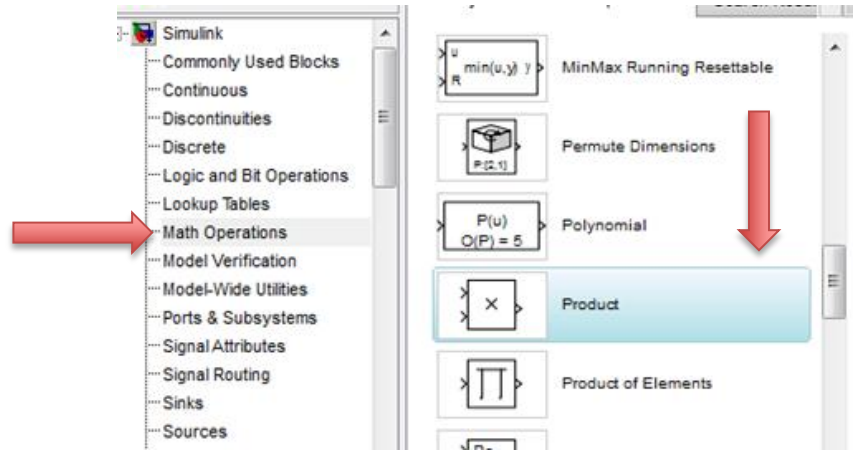
Figura 4.27 Selección del bloque “Constant”



Fuente: Software MATLAB

- En el submenú “Math Operations”, está el bloque producto y se escoge en dos ocasiones para la hoja de trabajo. (Ver Figura 4.28)

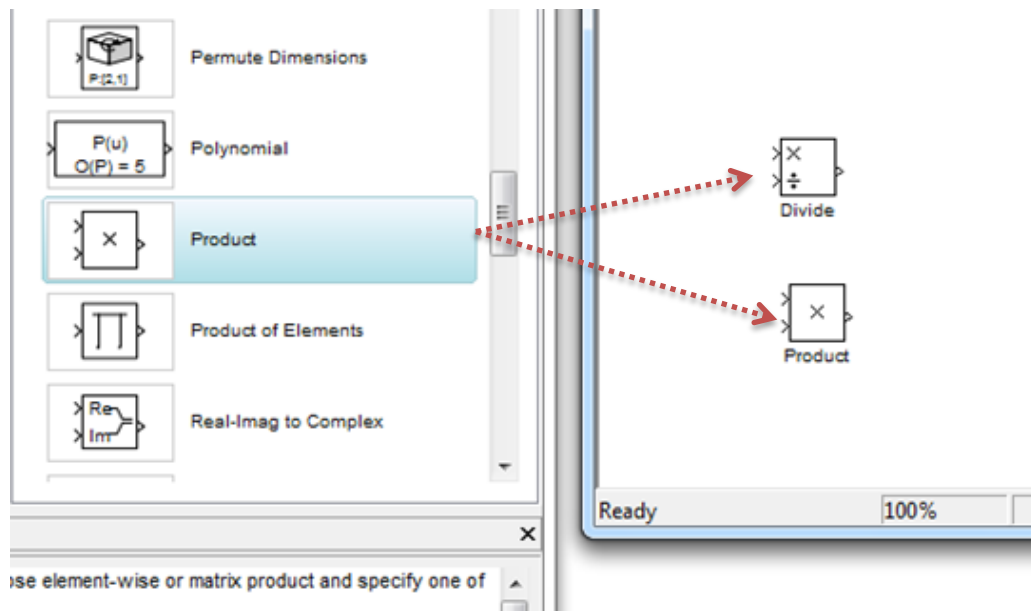
Figura 4.28 Submenú “Math Operations” donde se encuentra el bloque “Product”



Fuente: Software MATLAB

- El bloque del producto realiza la multiplicación o división de sus entradas.
- Este bloque genera salidas, ya sea usando un elemento a gota o matriz multiplicación, dependiendo del valor del parámetro de multiplicación (h, p, k, A). Se especifican las operaciones con el número de parámetro entradas. El bloque de Producto realiza primero las operaciones especificadas multiplicar o dividir en las entradas, y luego convierte los resultados al tipo de datos de salida utilizando los modos de redondeo y desbordamiento especificados. (Ver Figura 4.29)

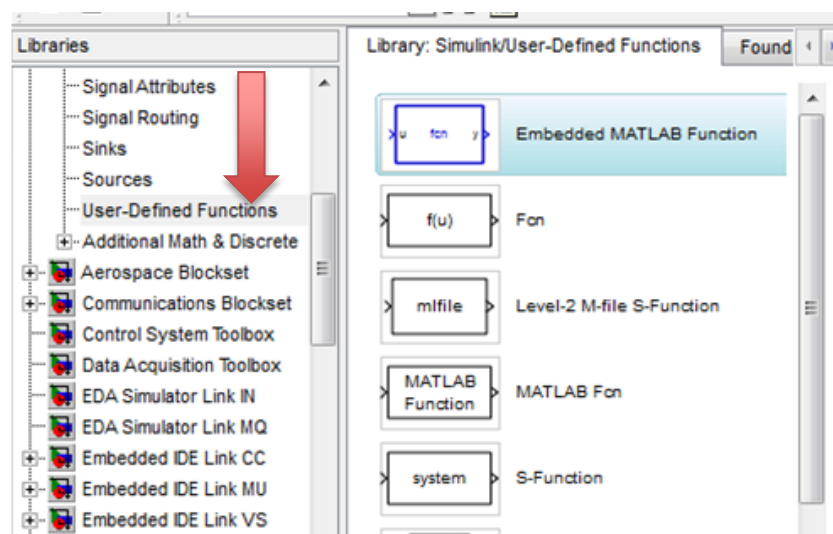
Figura 4.29 Selección del bloque “Product”



Fuente: Software MATLAB

- Se hace clic en el menú “Simulink”, se encuentra el submenú “User-Defined Functions”, donde se halla el bloque “Embedded MatLab Function”. (Ver Figura 4.30)

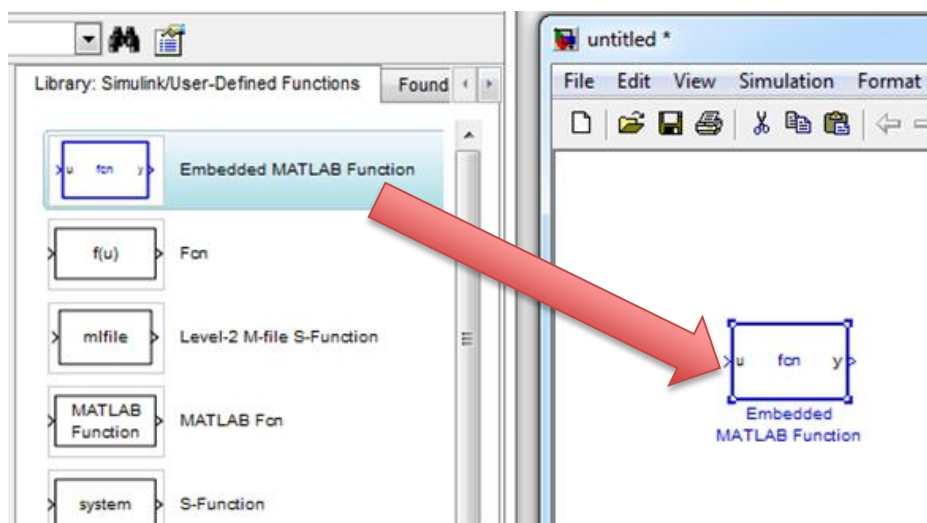
Figura 4.30 Submenú “User-Defined Functions” donde se encuentra el bloque “Embedded MATLAB Function”



Fuente: Software MATLAB

- Se genera el código embebido, el bloque de funciones Embedded MATLAB se basa en un análisis que determina el tamaño y la clase de cada variable. Este análisis impone restricciones adicionales sobre la forma en que se pueden utilizar los bloques anteriores. (Ver Figura 4.31)
1. La primera definición de una variable debe definir tanto su clase y tamaño. La clase y el tamaño de una variable no se puede cambiar una vez que se ha establecido.
 2. Si los datos es complejo o real está determinada por la primera definición. Definiciones posteriores pueden asignar números reales en el almacenamiento complejo, pero no pueden asignar números complejos en el almacenamiento real.
- Se puede realizar las siguientes funciones en Embedded MATLAB como son:
 - Funciones de cálculo.
 - Las operaciones con matrices, como el tamaño y la longitud.
 - Operaciones con matrices avanzadas como lu, inv, svd, y chol.
 - Funciones trigonométricas como seno, coseno, sinh y cosh.

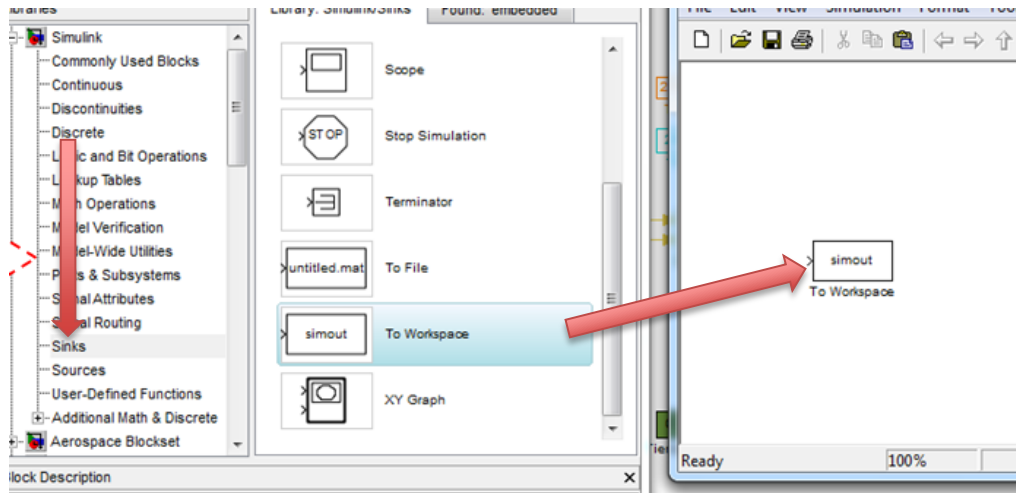
Figura 4.31 Selección del bloque “Embedded MATLAB Function”



Fuente: Software MATLAB

- En el submenú “Sinks” se encuentra el bloque “To Workspace”, El bloque área de trabajo (su nombre en español), escribe su entrada al espacio de trabajo de MATLAB.

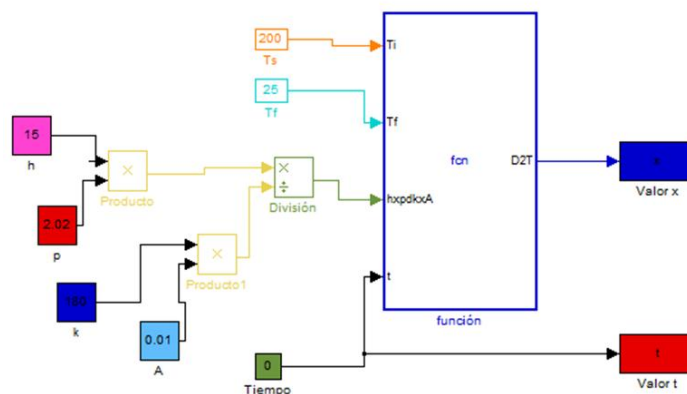
Figura 4.32 Ingreso del bloque “To Workspace”



Fuente: Software MATLAB

- El bloque escribe su salida a una matriz o estructura que tiene el nombre especificado por el parámetro Nombre de la variable del bloque. Guarda una información determinada en el formato de salida. (Ver Figura 4.32)
- Una vez que se han seleccionado todos los bloques para el programa, lo siguiente será ordenarlos y conectarlos, de tal forma que sea un diagrama de bloques congruente. (Ver Figura 4.33)

Figura 4.33 Diagrama de bloques en SIMULINK



Fuente: Software MATLAB

- Como se mencionó en un párrafo anterior, se usó un bloque “To Workspace” el cual manda la señal o conecta SIMULINK con una hoja de cálculo en MATLAB. Se realiza un programa en formato .m en MATLAB para poder graficar con una resolución superior a la que arrojaría el “Scope” de SIMULINK. El código del programa será el siguiente.

```
close all
clear all
clc%limpiamos la pantalla

%% en simulink
tiempoinicial=0;%valor inicial del tiempo
tiempofinal=1;%valor final del tiempo

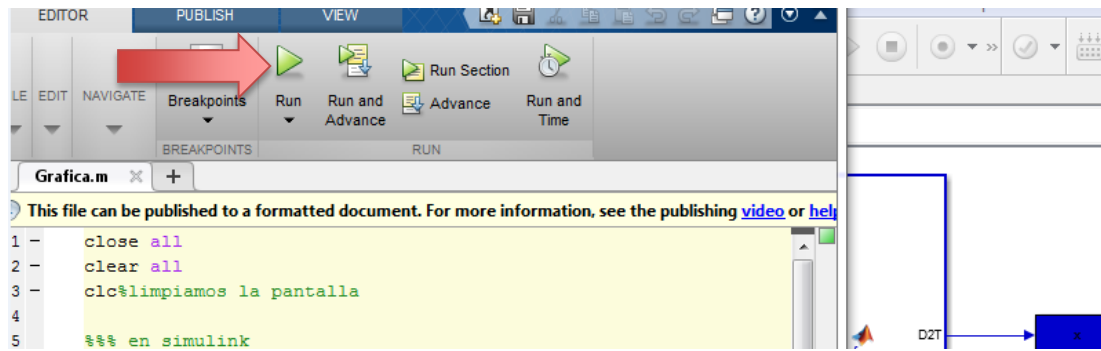
sim('Simulinkprograma.mdl')%llama al programa en simulink

xgrafica=x.signals.values;%llama a la evaluación que se hace en
silulik para el eje de las x
tiempografica= t.signals.values;%llama a la evaluación que se
hace en silulik para el eje de las y

figure (1)%llamamos al graficador
plot(tiempografica,xgrafica,'b');%grafica x vs y
hold on;
grid on;
xlabel('TIEMPO(s)')%descripción del eje de las x
ylabel('TEMPERATURA(°C)')%descripción del eje de las y
```

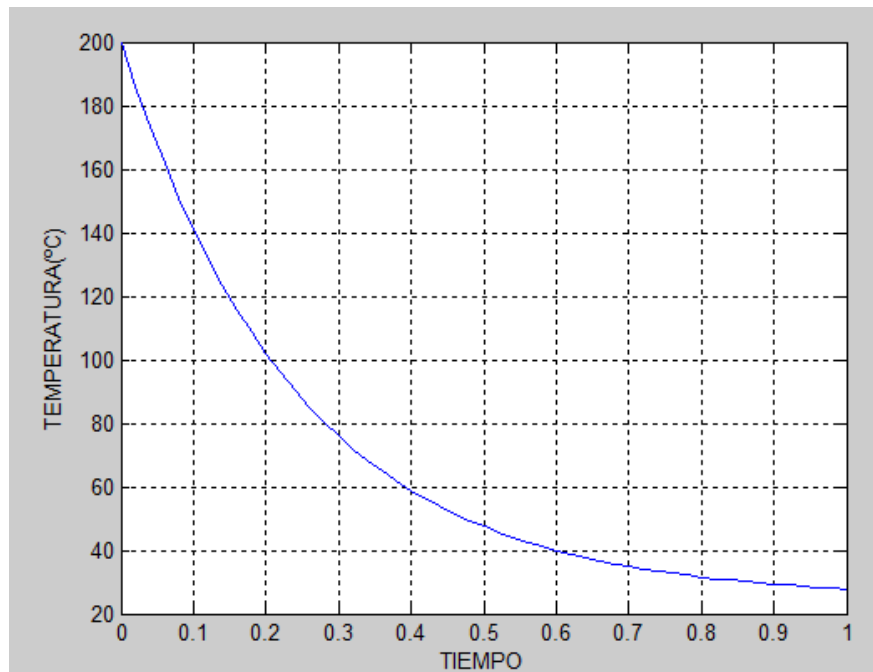
Al mandar a correr el programa, después de pocos segundos aparecerá la gráfica que será evaluada como resultado de la simulación. (Ver Figura 4.34)

Figura 4.34 Correr programa para obtener la simulación



Fuente: Software MATLAB

Figura 4.35 Curva Temperatura vs Tiempo de la simulación de transferencia de calor de una aleta rectangular de área constante y longitud “L”



Fuente: Software MATLAB

CAPÍTULO 5

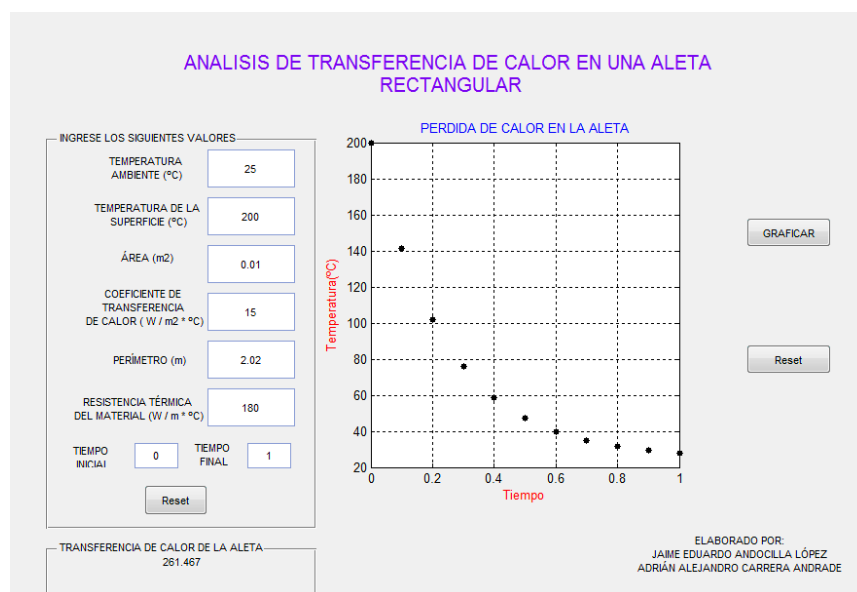
ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una vez que se han realizado los respectivos cálculos experimentales, configurado SIMULINK con los respectivos diagramas de bloques anteriormente indicados y se ha codificado la ecuación analizada con MATLAB, se obtiene finalmente una simulación en relación al tiempo que será analizada a continuación.

La ecuación de la transferencia de calor de una aleta esta derivada en función al tiempo, lo que produce que se pueda variar los diferentes parámetros del programa y obtener diferentes comportamientos en la curva, de esta manera se comprende qué sucede si existe un incremento o reducción en el intervalo de tiempo, temperaturas, áreas, perímetros, etc.

Es necesario recordar que el software de MATLAB trabaja en función de diferencias finitas, es decir, el programa no muestra su resolución, solo nos indicará el resultado final, ya que interiormente el programa elabora, codifica, identifica y descifra usando diferencias finitas la ecuación o fenómeno a simular.

Figura 5. 1 Curva de pérdida de calor de una aleta en función a los valores experimentales



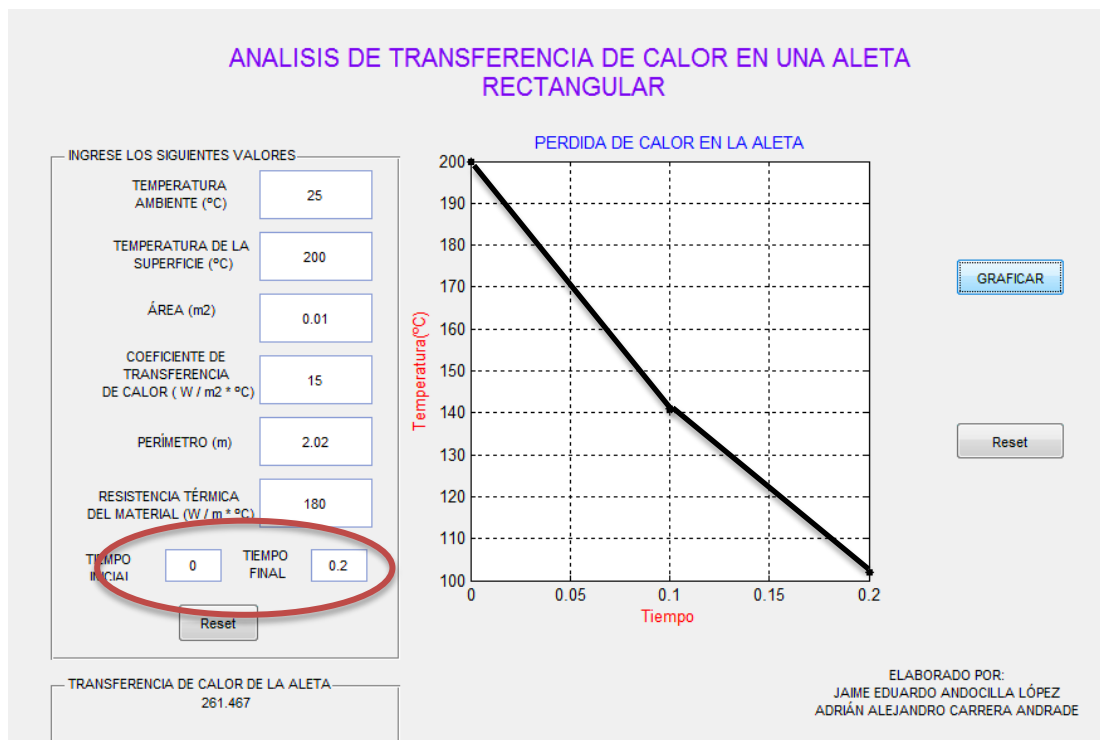
Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

La Figura 5. 1 muestra el comportamiento del fenómeno de la transferencia de calor de una aleta rectangular de área constante y longitud “L”, donde los valores están en relación al ejercicio propuesto para los cálculos experimentales.

5.1 Variación en el intervalo de tiempo

Como se aprecia en la Figura 5. 1, la curva se encuentra graficada dentro de un intervalo de tiempo de 0 a 1, donde se observa que la temperatura de la aleta empieza en 200°C y bajará hasta tener una tendencia a estar constante en los 25°C, es decir, llegará a estabilizarse en función a la temperatura ambiente. Este intervalo de tiempo muestra en sí, el comportamiento que tendrá la temperatura durante todo el proceso de transferencia de calor o pérdida de calor de la aleta.

Figura 5. 2 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0 a 0.2

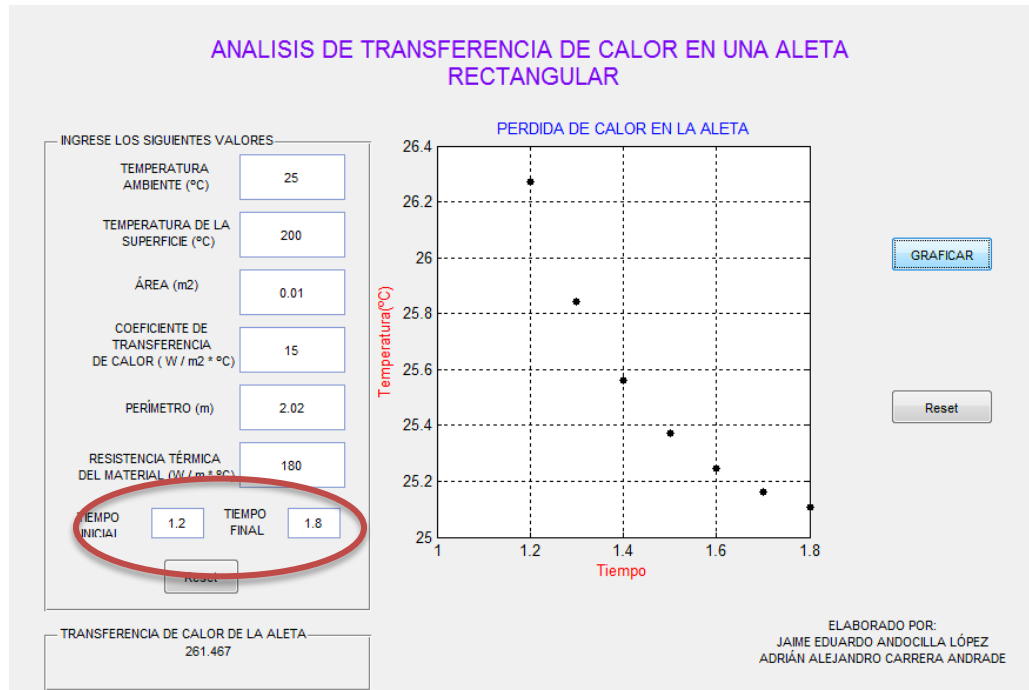


Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

La Figura 5. 2 y Figura 5. 3 nos muestran una curva en una intervalo (de 0 a 0.2 y de 1.2 a 1.8 respectivamente), por eso visualmente se observa casi una recta en el

primer caso y en el segundo caso nos muestra una parte donde se puede apreciar ya una curva, por lo tanto, la forma del gráfico mostrado en el programa depende del intervalo donde es evaluado.

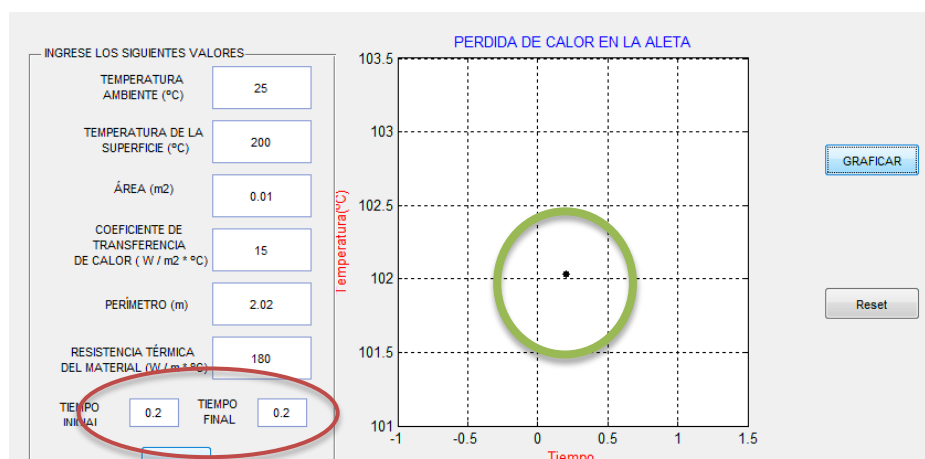
Figura 5. 3 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 1.2 a 1.8



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

Al usar un intervalo reducido (de 0.2 a 0.2), el gráfico a obtenerse será un solo punto, lo que significa que ese punto representa la temperatura exacta que tiene la aleta en ese tiempo. (Ver Figura 5. 4)

Figura 5. 4 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0.2 a 0.2



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

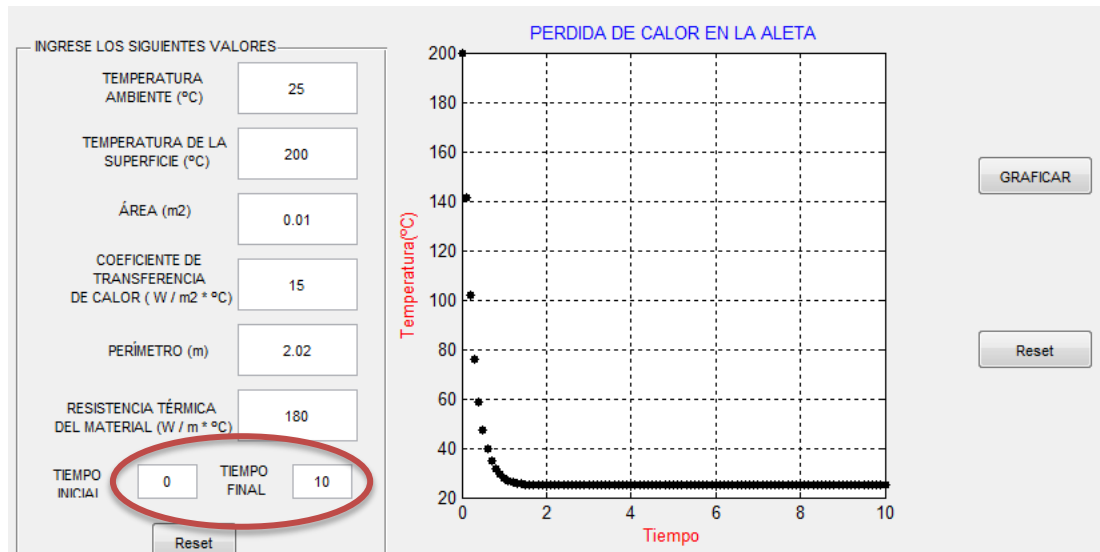
Lo más importante es saber que si analizar un comportamiento completo de la pérdida de calor de la aleta en función del tiempo, se debe escoger el intervalo necesario que muestre todo el fenómeno, es decir, que muestre el punto inicial de la temperatura hasta donde la temperatura se establece constante en relación a la temperatura ambiente. (Ver Figura 5. 5 y Figura 5. 6)

Figura 5. 5 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0 a 5



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

Figura 5. 6 Curva de la pérdida de calor de una aleta en un intervalo de tiempo de 0 a 10

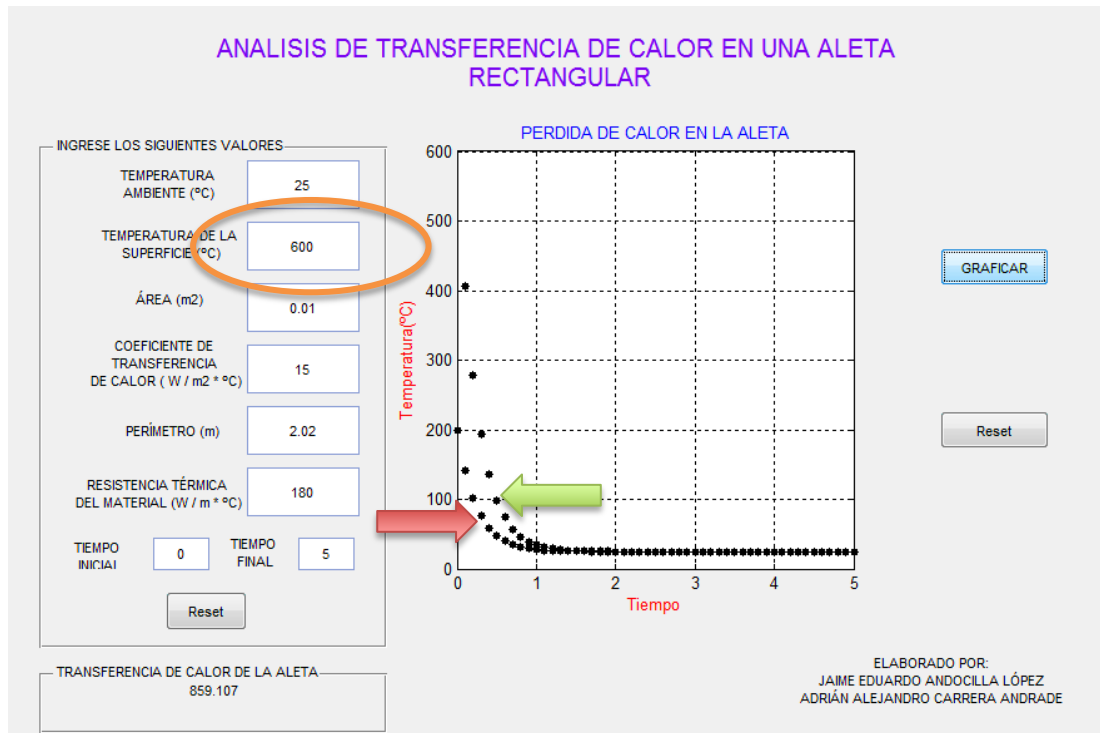


Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

5.2 Variación de la Temperatura

En la Figura 5. 7 se observa que la temperatura de la superficie ha sido incrementada a 600 °C, lo que produce un cambio en la curva. La flecha roja nos indica la curva que se produce al introducir una temperatura de superficie de 200 °C, esta curva tiene un descenso más rápido a la temperatura ambiente. La flecha verde indica la curva que se produce al introducir una temperatura de superficie de 600 °C y manteniendo los valores de las otras variables, esta curva tiene un comportamiento diferente al de la flecha roja, el motivo es que si la aleta se encuentra a mayor temperatura inicial o de superficie va a necesitar más tiempo en enfriarse y alcanzar una temperatura constante igual a la temperatura ambiente. Por lo tanto, a mayor temperatura, mayor será el tiempo de enfriamiento.

Figura 5. 7 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación de temperatura

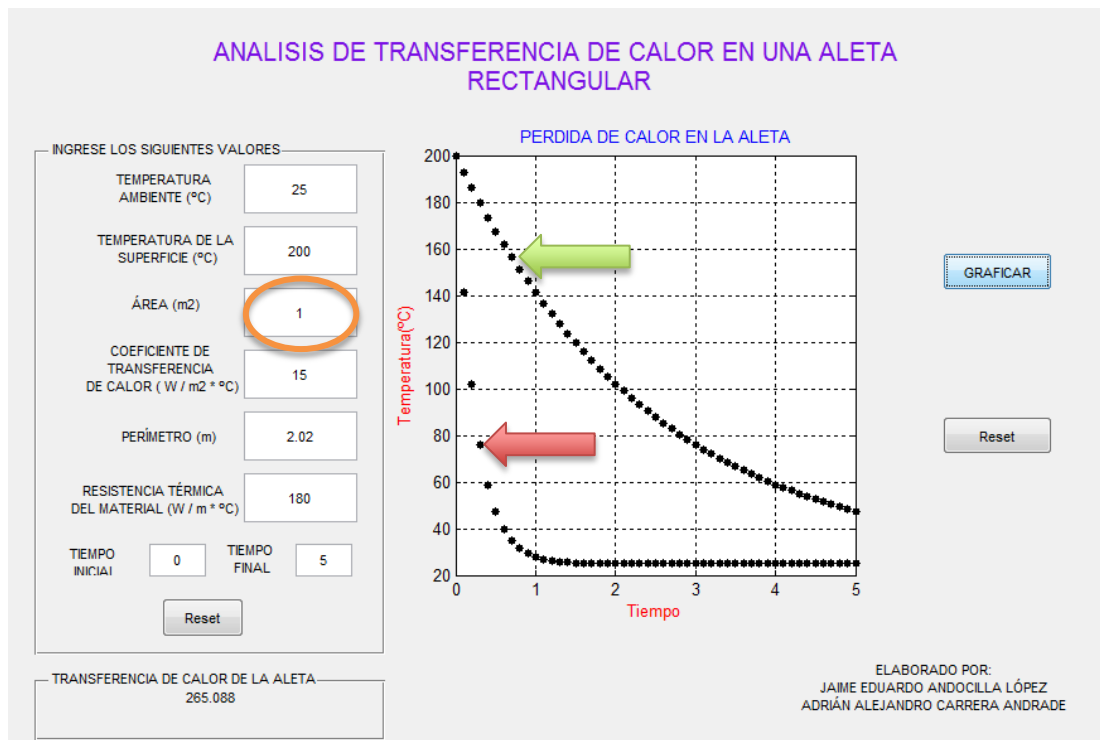


Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

5.3 Variación de sección o área

En la Figura 5. 8 las curvas son distintas ya que se realiza una variación de sección o área. La flecha roja dibuja una curva más pronunciada, esta curva tiene como área el valor de 0.01 m², esta área o sección es mucho más pequeña al área que utiliza la curva mostrada con la flecha verde que es 1 m². Por lo tanto, como análisis se puede determinar que el área es un factor muy importante en la pérdida de calor, mientras la aleta tiene menor área (flecha roja) el enfriamiento es mucho más rápido que cuando la aleta tiene un área mayor (flecha verde).

Figura 5. 8 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación de sección o área

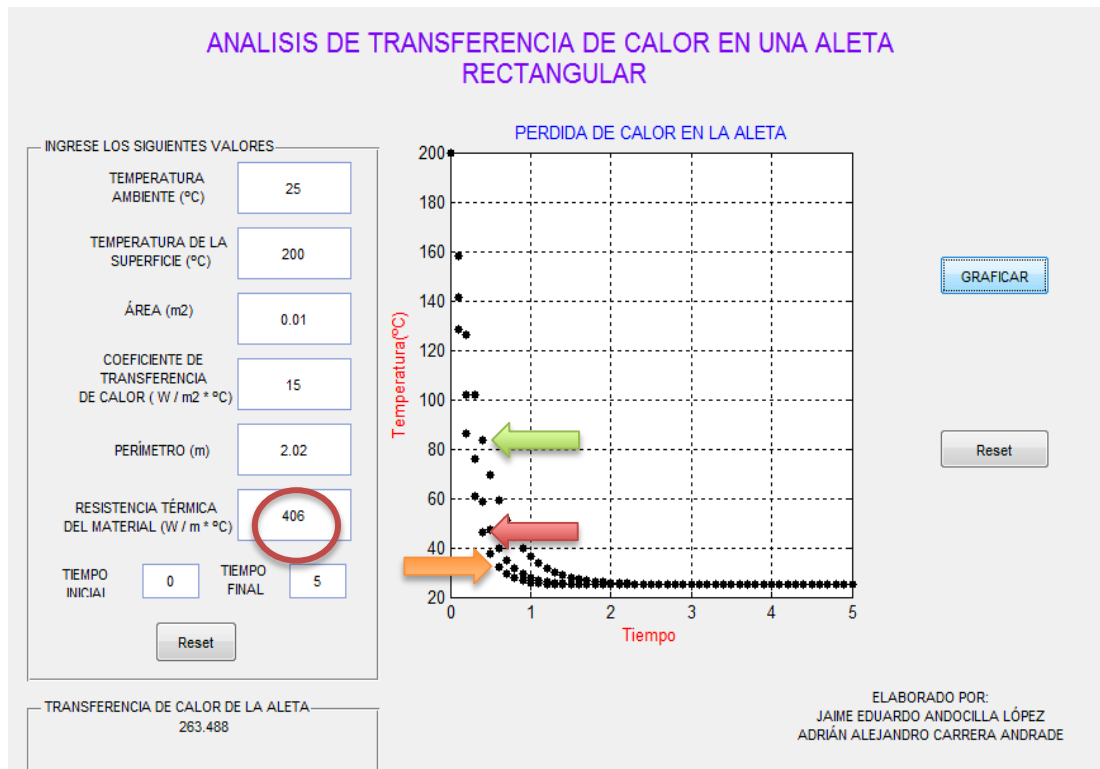


Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

5.4 Variación de la resistencia térmica del material

Al tener un cambio de material de la aleta, se varía directamente la resistencia térmica, que es una propiedad de cada material. Por ende se puede observar en la Figura 5. 9 la flecha roja muestra una curva que usa una resistencia térmica del aluminio (180 (W/m°C)), la flecha anaranjada indica una curva que usa la resistencia térmica del latón (109 W/m°C) y la flecha verde nos da una curva que usa la resistencia térmica de la plata (406 W/m°C). Sí se analiza, es fácil darse cuenta que la resistencia térmica es directamente proporcional a la disminución del tiempo de enfriamiento, mientras mayor sea la resistencia mayor es el tiempo de enfriamiento y mientras menor sea la resistencia menor será el tiempo de enfriamiento.

Figura 5. 9 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación de la resistencia térmica del material

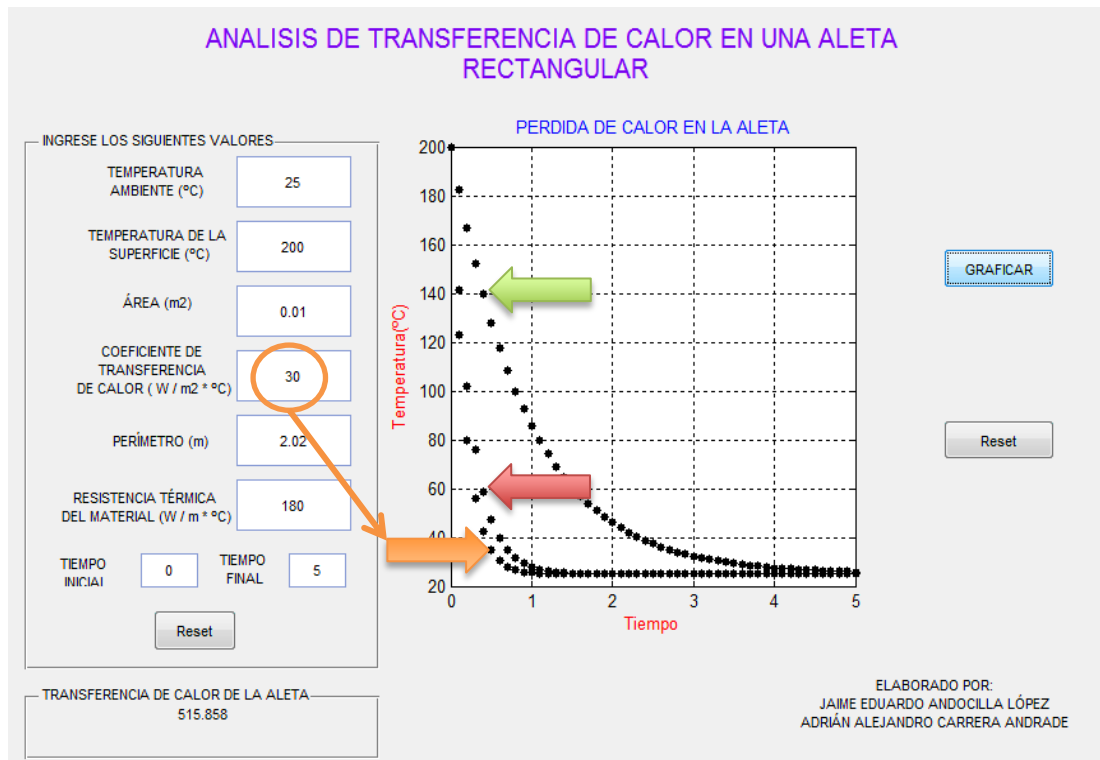


Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

5.5 Variación del coeficiente de transferencia de calor

El coeficiente de transferencia de calor es una propiedad del ambiente donde se produce la transferencia o pérdida de calor. Esta propiedad define de gran manera la velocidad del proceso de enfriamiento. A mayor coeficiente de transferencia de calor, mayor será la velocidad del intercambio, por ende el tiempo requerido para el enfriamiento o equilibrio de temperaturas entre la ambiente y la de la aleta será menor, y ocurrirá todo lo contrario si el coeficiente de transferencia de calor es menor. La flecha roja muestra una curva que usa un coeficiente mayor que la curva mostrada por la flecha verde; y la curva anaranjada indica una curva donde el coeficiente es mayor que la curva mostrada por la flecha roja, es decir el enfriamiento en este caso es más rápido en función al tiempo y más veloz en función a la velocidad. (Ver Figura 5. 10)

Figura 5. 10 Curva de la pérdida de calor de una aleta con variación del coeficiente de transferencia de calor



Elaborado por: Jaime Andocilla, Adrián Carrera

CONCLUSIONES

- Las diferentes ecuaciones investigadas acerca de la transferencia de calor para aletas rectangulares son muy generales y no toman otros parámetros esenciales para esta investigación, por tal motivo el uso de diferencias finitas ayudó a tener una relación de temperatura - tiempo y temperatura - distancia de la aleta, obteniendo valores más cercanos a la realidad.
- La aplicación del Método de Crout es una de las maneras de resolución que ayudó a saber de qué manera se está manifestando el intercambio de temperaturas entre la aleta y el medio en que se está desarrollando este fenómeno, el método usa diferentes intercambios de matrices y sistemas de ecuaciones, sin importar la magnitud matricial, el método de Crout de manera iterativa halló cada valor, dependiendo del número de nodos que se aplicó en las diferencias finitas.
- El hecho de poder modelar ecuaciones de cualquier tipo de comportamiento y probar su funcionamiento de manera inmediata sobre el sistema real hace que la utilización de MATLAB entrelazado con SIMULINK aporte de manera eficiente al estudio de la ingeniería que está envuelta en un proceso de transferencia de calor mediante superficies extendidas.
- La utilización de una herramienta como MATLAB posibilitó la realización de simulaciones en tiempo real y cercano a la realidad. Esto permitió ir más allá de la simulación tradicional y producir un acercamiento al problema.
- Además la utilización de SIMULINK dio un camino rápido y directo empezando desde el diseño del sistema hasta su modelación, y se redujo de este modo el tiempo y los costos en el diseño de sistemas de visualización y control.

- Dado que SIMULINK está construido a partir de MATLAB, proporcionó un entorno único de desarrollo. Este sistema permitió ejecutar las simulaciones de manera interactiva, con el uso de las interfaces gráficas de SIMULINK y programaciones matemáticas y visuales enlazados con MATLAB, con la ejecución de diferentes diagramas de bloques que mostró como resultado la visualización del modelo matemático – científico de la ecuación diferencial de la transferencia de calor de una aleta.
- El estudio basado desde la parte matemática de un proceso en la ingeniería, muestra un diferente punto de vista del análisis del mismo, este indica cómo de forma interactiva las matemáticas actúan de forma exacta para detallar el comportamiento investigado, es decir, los problemas encontrados en la ingeniería son resueltos mediante modelos matemáticos que en el transcurso de la historia han sido desarrollados con la finalidad de tener una investigación real. Por ende se concluye que el comportamiento físico de la transferencia de calor va directamente ligado al comportamiento del fenómeno.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda el uso de otro tipo de simulador o software para la respectiva comparación de errores con los resultados obtenidos en MATLAB.
- Se podría hacer una investigación más extensa acerca del análisis de diferencias finitas aplicadas a la transferencia de calor en superficies extendidas sin importar la geometría.
- Considerar otro tipo de método teórico de resolución diferente a al Método de Crout y calificar si el usado en esta investigación es fiable.
- Este trabajo podría servir como base para otra tesis que analice el mismo tema pero con un análisis bidimensional.

LISTA DE REFERENCIAS

- Arce, A., & Vianna, G. (2009). *Manual avanzado de SIMULINK para la asignatura de fundamentos de automática*. España: Universidad de Valladolid.
- Ataurima, M. (2013). *MATLAB & SIMULINK para ingeniería*. Perú: Universidad de Ciencias y Humanidades de Peru.
- Balmer, L. (1997). *Signals and Systems, An introduction* (Vol. Second Edition). Inglaterra: Prentice Hall.
- Cengel, Y. A. (2004). *Transferencia de calor y masa*. México: McGraw-Hill.
- Herreros, A., & Baeyens, E. (2010). *Curso de programación de MATLAB y SIMULINK*. España: Universidad de Valladolid.
- Holman, J. (1999). *Transferencia de calor*. México: Continental S.A.
- Incropera, J. P., & De Witt, D. P. (2000). *Fundamentos de transferencia de calor*. Mexico: Pearson Educación.
- Kern, D. (1999). *Procesos de transferencia de calor*. México: Compañía Editorial Continental S.A.
- Kern, D. Q., & Kraus, A. D. (1972). *Extended surface heat transfer*. Estados Unidos: McGraw-Hill Book Company.
- Kreith, F., & Bohn, M. S. (2002). *Principios de transferencia de calor*. España: Thomson.
- Reyes Cortés, F. (2012). *MATLAB aplicado a robótica y mecatrónica*. México: Alfaomega.
- Rosenow, W., & Hartnett, J. (1981). *Handbook of heat transfer*. México: Mc Graw Hill.
- Stremmer, F. G. (1998). *Introduction to communication systems*. Estados Unidos: Addison-Wesley.

ANEXOS

ANEXO 1

COMANDO GUIDE

Qué es el GUIDE?

Las interfaces gráficas de usuario (GUI – Graphical User Interface en inglés), es la forma en que el usuario interactúa con el programa o el sistema operativo de una computadora. Una GUI contiene diferentes elementos gráficos tales como: botones, campos de texto, menús, gráficos, etc.

Existen diferentes lenguajes de programación que permiten crear una GUI tales como: C, Visual Basic, TK, etc. Solo por mencionar algunos. Todos ellos permiten usar diferentes controles y maneras de programarlos. MATLAB nos permite realizar GUIs de una manera muy sencilla usando GUIDE (Graphical User Interface Development Environment).

Cómo crear un GUI en MATLAB?

Una de las herramientas con la que cuenta MATLAB, es la creación de GUIs. La forma de implementar las GUI con MATLAB es crear los objetos y definir las acciones que cada uno va a realizar. Al usar GUIDE se obtiene dos archivos:

- Un archivo FIG – Contiene la descripción de los componentes que contiene la interface.
- Un archivo M – Contiene las funciones y los controles del GUI así como el callback.

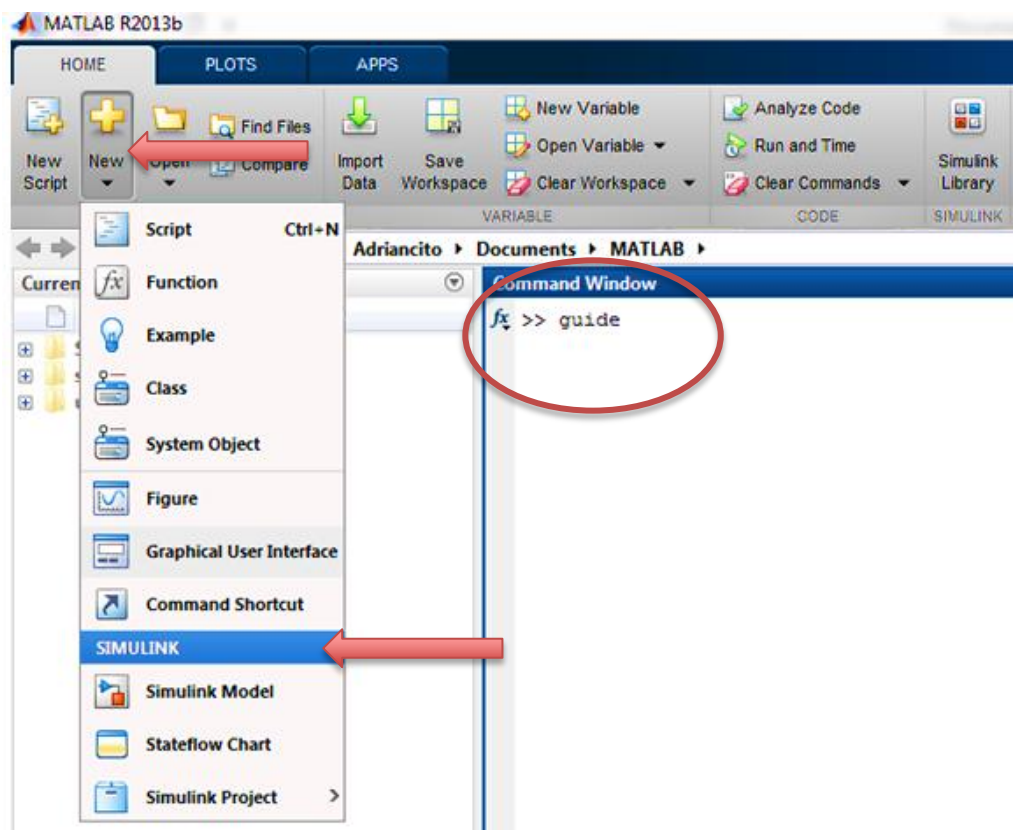
Un “callback” se define como la acción que llevará a cabo un objeto de la GUI cuando el usuario lo active. Para ejemplificarlo, suponga que en una ventana existe

un botón el cual al presionarlo ejecutará una serie de acciones, a eso se le conoce como la función del “callback”.

Cómo iniciar el GUIDE?

Para crear una GUI en MATLAB se usa GUIDE, ya sea que se escriba `guide` en la ventana de comandos de MATLAB o lo ejecute desde el menú principal File – New – GUI. (Ver Gráfico 1 Anexo1)

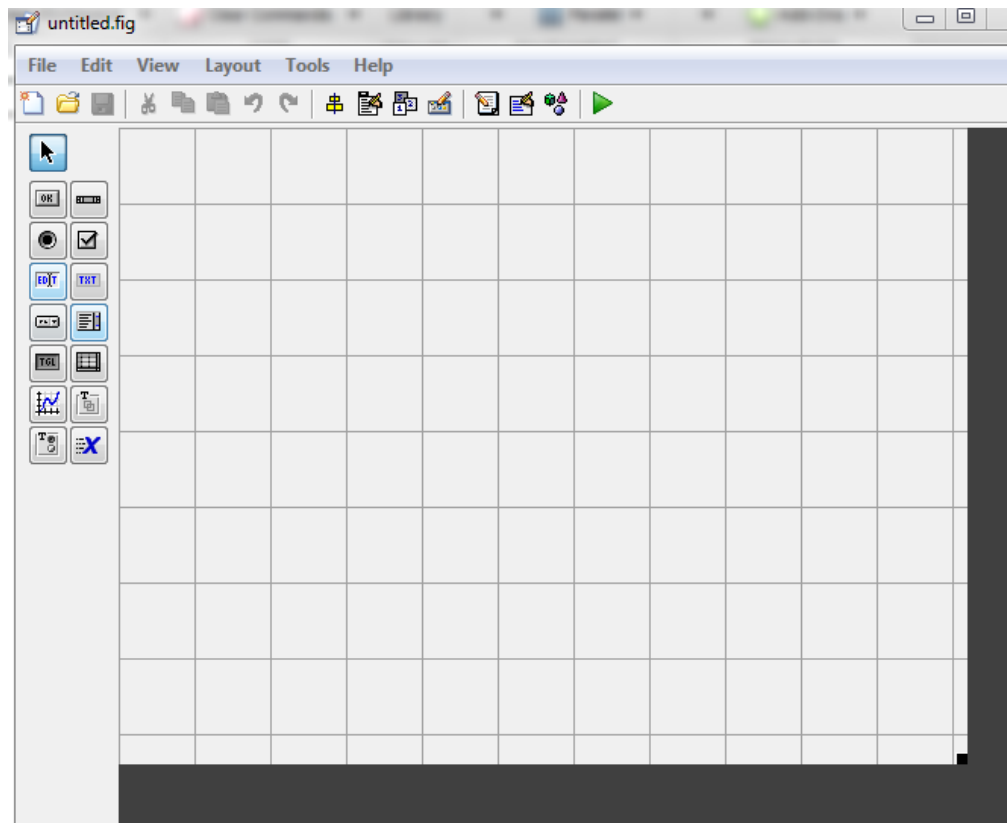
Gráfico 1 Anexo 1 - Ejecución de GUIDE usando el menú principal o la ventana de comandos



Fuente: Software MATLAB

MATLAB mostrará un área de diseño similar a la del Gráfico 2 Anexo 1. En la parte superior se encuentran los menús y opciones de GUIDE, en el parte izquierda se aprecian los diferentes controles y en la parte central el área de diseño donde se colocaran los controles a usar.

Gráfico 2 Anexo 1 - Área de trabajo de GUIDE



Fuente: Software MATLAB

Partes del GUIDE

De todo lo anterior se indica las partes más importantes de GUIDE:



Inspector de propiedades: Cada control cuenta con diferentes propiedades y es aquí donde se podrá cambiar: el color, el nombre, el tag, el valor, el callback entre otros.



Activar Figura: Una vez que se haya terminado de diseñar se presiona este botón para activar la figura y poder probar nuestra GUI.



Push Button: Crear un botón.



Radio Button: Crea un botón circular.



Edit Text: Crea un campo de texto.



Axes: Crea una área para gráficas.



Frame: Crea un marco que puede contener otros controles.



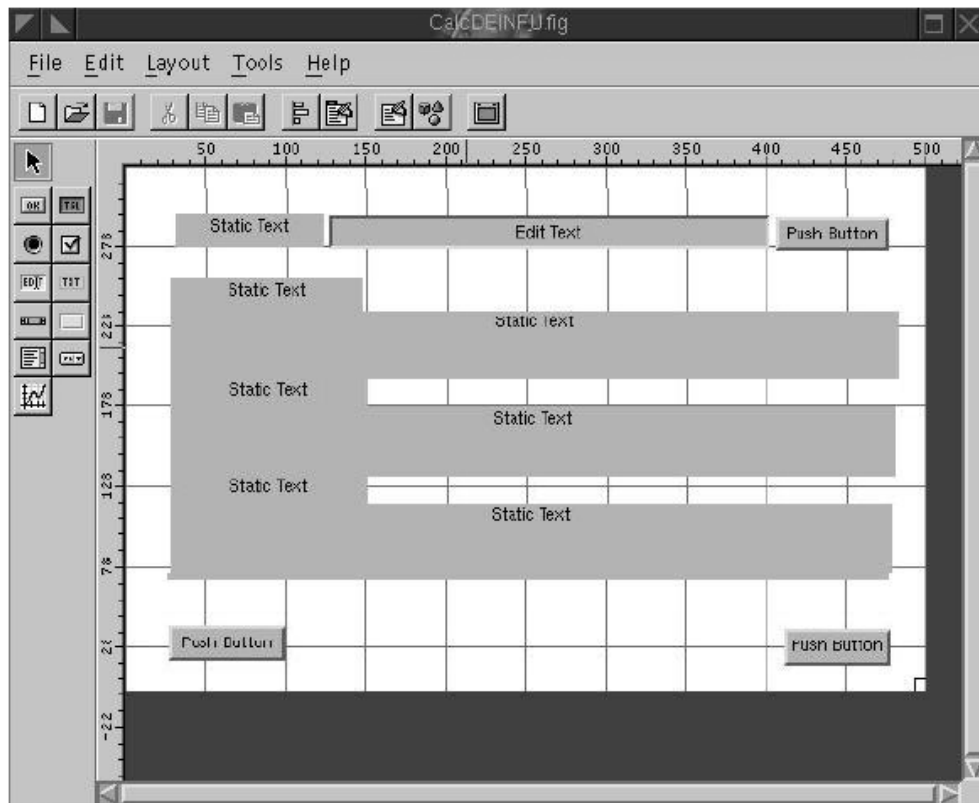
Static Text: Crea un letrero.

Calculadora de derivadas, integrales y Fourier con GUIDE

A continuación se dará una breve explicación de cómo usar los Text Box para pedir información y Static Text para desplegar resultados, así como algunas otras propiedades importantes. Para empezar se crea una nueva figura y se agrega un Static Box a un lado se pone un Text Box y al lado del Text Box se pone un Push Button, debajo de estos controles se pone 6 Static Text y finalmente se agrega dos Push Buttons; y se guarda como: CalcDEINFU.fig, al finalizar se tiene una interface como la que se muestra en el Gráfico 3 Anexo 1.

En el primer Static Text se cambia sus propiedades con el Inspector de Propiedades y se modifica el String a: Función: de ahí el Text Box se cambia la propiedad de String a: x, al primer Push Button se le cambia el String a: Calcula.

Gráfico 3 Anexo 1- Interface del Proyecto



Fuente: Software MATLAB

En el siguiente orden se modificará las propiedades de String de cada Static Text:

String: Derivada

String:

String: Integral

String:

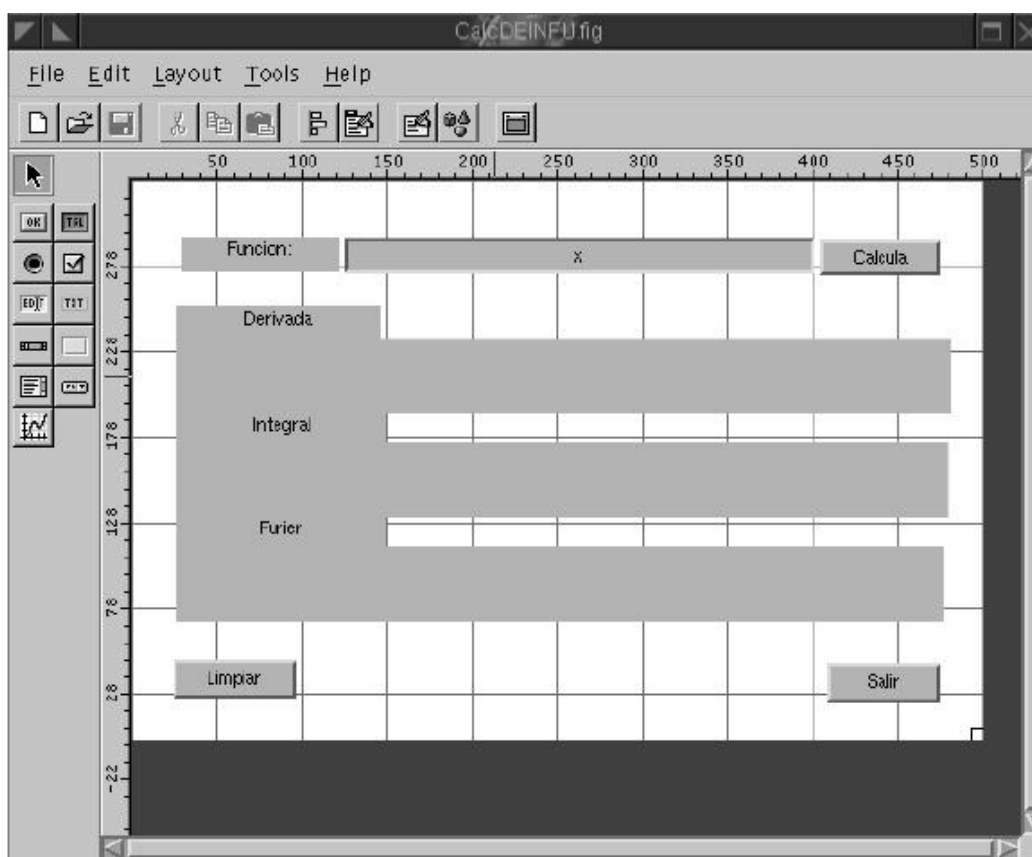
String: Fourier

String

Finalmente para el Push Button del lado izquierdo se modifica la propiedad String a: Limpia y al Push Button del lado derecho String a: Salir. Finalmente se obtiene los controles como en el Gráfico 4 Anexo 1.

Ahora se va a editar el callback del botón Limpia, cuya acción es limpiar la caja de texto de la función y los resultados de cada operación.

Gráfico 4 Anexo 1 - Propiedades String modificadas en cada control



Fuente: Software MATLAB

Para hacer ello hay que considerar un identificador a cada Tag de cada control, esto es, poner un nombre a cada control para luego llamarlo e identificarlo. Para ello se selecciona Tag en el Inspector de Propiedades. Primero se edita el Tag de nuestro control de la caja de texto por: la_ecuacion (ver Gráfico 5 Anexo 1). Y por los Static Text que no tienen texto se modifican sus Tag en el siguiente orden por:

Gráfico 5 Anexo 1 - Editando Tag con Inspector de Propiedades



Fuente: Software MATLAB

Ahora es posible saber que va a pasar con cada Static Text al presionar el botón Limpia. El algoritmo en general para limpiar sería:

1. Definir variables
2. Limpiar variables
3. Buscando los controles con el Tag
4. Definir limpia
5. Limpiar controles

Aquí hay que introducir el uso de variables globales y locales. Las globales se refieren a que pueden ser compartidas en cualquier momento por otro scrip. Las locales son las que se definen en un mismo momento y pueden ser usadas por el mismo script. Existe un comando de importancia para crear las variables locales y globales el cual es “who”, en el Gráfico 6 Anexo 1 se observa cómo usar “who” para ambos tipos de variables.

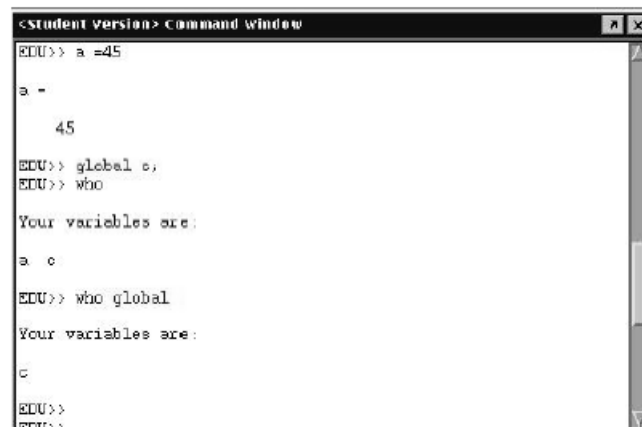
La sintaxis en general para activar un control es:

Variable = findobj (gcbf, tag, nombre-de-Tag);

Lo cual nos indica que primero crea una variable la cual contiene las propiedades del objeto cuyo Tag es: Nombre-de-Tag, con esto ya se activó el control, ahora hay que regresar la acción; para ello la sintaxis es:

Set (Variable, Propiedad, Operación);

Gráfico 6 Anexo 1 – Obteniendo variables locales y globales



```
<Student Version> Command Window
EDU>> a =45
a =
    45
EDU>> global c;
EDU>> who
Your variables are:
a c
EDU>> who global
Your variables are:
c
EDU>>
```

Fuente: Software MATLAB

Esta instrucción nos dice que va a usar la variable local que contiene las propiedades del objeto y va a modificar otra propiedad (String, Enable, BackColor, etc.) con un determinado valor. Para ejemplificar esto se edita el Callback del botón Limpia.

Limpio variables locales y globales

```
clear;  
clear global;
```

Obtengo el control de la derivada

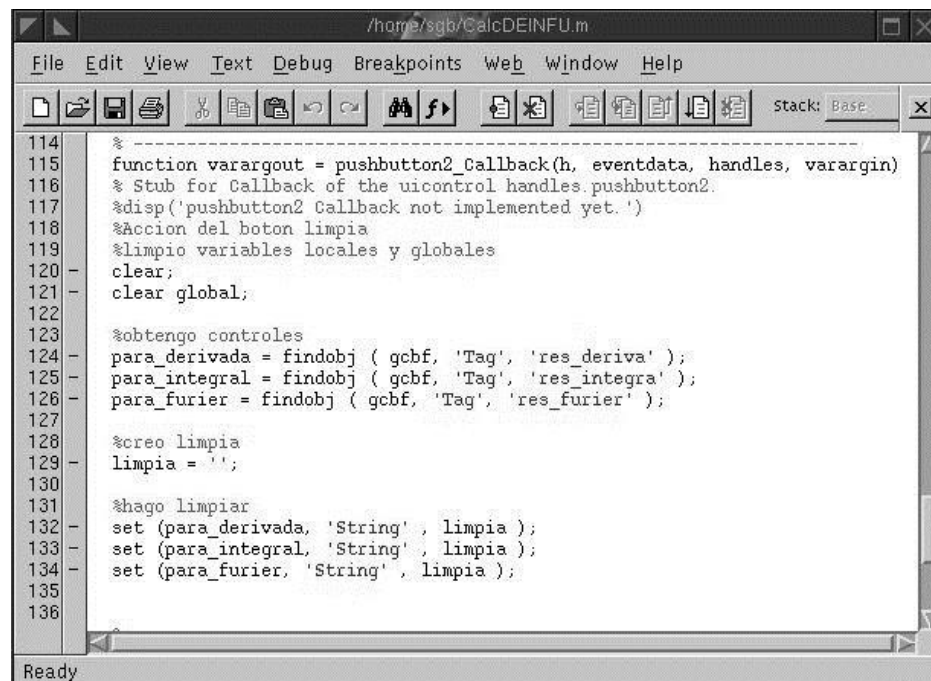
```
para_derivada = findobj (gcbf, 'Tag', 'res_deriva');
```

Limpio el control

```
limpia = '';  
set (para_derivada, 'String', limpia );
```

Y se realiza lo mismo para los demás controles, el listado completo se observa en el Gráfico 7 Anexo 1.

Gráfico 7- Anexo 1 Código completo del botón limpia



Fuente: Software MATLAB

Hasta el momento no se ha pedido datos o información, el algoritmo para obtener la ecuación es:

- 1 – Defino variables
- 2 – Obtengo datos (Ecuación)

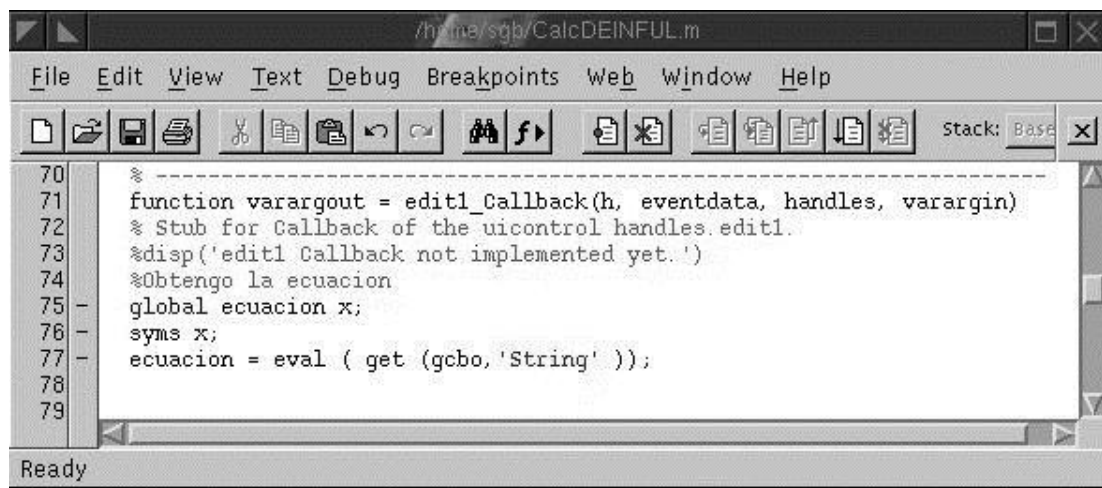
Para lograr ello se usa la siguiente instrucción:

```
Variable = eval ( get (gcbo, 'String' ) );
```

Lo que significa que se crea una variable donde se almacena la información que le llegue a la caja de texto para luego utilizarla. Hay que recordar que aquí es necesario definirla como una variable de tipo global.

El código completo de la caja de texto se observa en el Gráfico 8 Anexo 1.

Gráfico 8 Anexo 1 - Código de la caja de texto



Fuente: Software MATLAB

Finalmente se lleva a cabo las operaciones correspondientes, las que se ejecutan al presionar el botón Calcula. Para ello se edita el callback según el siguiente algoritmo:

1 - Obtengo variables de la ecuación

2 – Busco controles con el Tag

3 – Hago cálculos

4 – Presento resultados

Usando las instrucciones:

Se prepara las variables a usar:

```
global ecuacion x;
```

```
syms x;
```

Se obtiene el control de la derivada:

```
para_derivada = findobj ( gcbf, 'Tag', 'res_deriva' );
```

Se realiza el cálculo de la derivada:

```
derivada1 = diff (ecuacion);
```

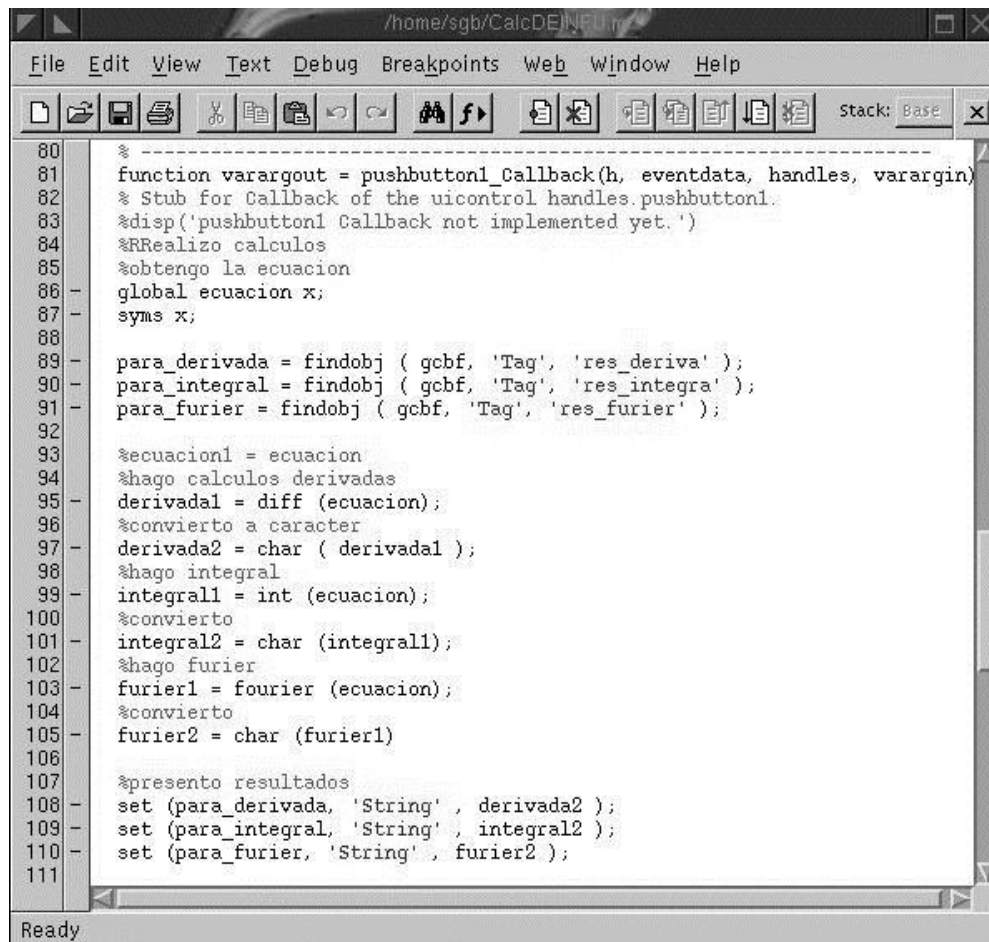
Ahora se prepara el resultado para poderlo desplegar en forma de carácter usando la instrucción `char()` `derivada2 = char (derivada1);`

Finalmente se despliega el resultado de la derivada:

```
set (para_derivada, 'String', derivada2 );
```

Y se realiza la misma operación para los otros dos cálculos. En el Gráfico 9 Anexo 1 se aprecia el código completo del botón Calcula.

Gráfico 9 Anexo 1 - Código completo del botón calcula

A screenshot of a MATLAB script editor window. The title bar shows the file path "/home/sgh/CalcDEINFEU.m". The menu bar includes File, Edit, View, Text, Debug, Breakpoints, Web, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and debugging. The script code is as follows:

```
80 %  
81 function varargout = pushbutton1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)  
82 % Stub for Callback of the uicontrol handles.pushbutton1.  
83 %disp('pushbutton1 Callback not implemented yet.')
```

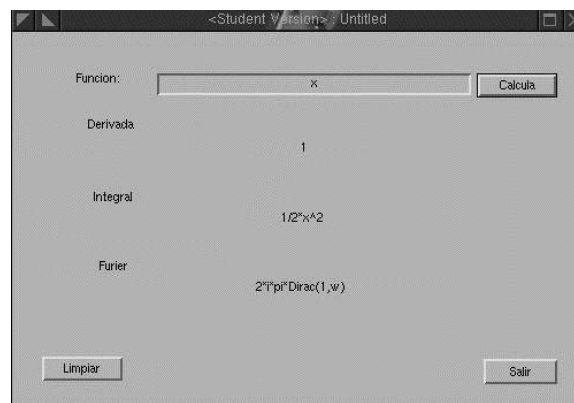
```
84 %Realizo calculos  
85 %obtengo la ecuacion  
86 global ecuacion x;  
87 syms x;  
88  
89 para_derivada = findobj ( gcbf, 'Tag', 'res_deriva' );  
90 para_integral = findobj ( gcbf, 'Tag', 'res_integra' );  
91 para_furier = findobj ( gcbf, 'Tag', 'res_furier' );  
92  
93 %ecuacion1 = ecuacion  
94 %hago calculos derivadas  
95 derivada1 = diff (ecuacion);  
96 %convierto a caracter  
97 derivada2 = char ( derivada1 );  
98 %hago integral  
99 integrall = int (ecuacion);  
100 %convierto  
101 integral2 = char (integrall);  
102 %hago furier  
103 furier1 = fourier (ecuacion);  
104 %convierto  
105 furier2 = char (furier1)  
106  
107 %presento resultados  
108 set (para_derivada, 'String' , derivada2 );  
109 set (para_integral, 'String' , integral2 );  
110 set (para_furier, 'String' , furier2 );  
111
```

The status bar at the bottom shows "Ready".

Fuente: Software MATLAB

Para probar la aplicación se activa la figura y se tiene una salida como nos indica el Gráfico 10 Anexo 1.

Gráfico 10 Anexo 1 - Prueba de aplicación



Fuente: Software MATLAB

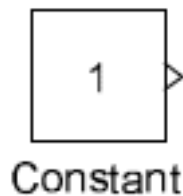
ANEXO 2

BLOQUES DE SIMULINK PARA EL DIAGRAMA DE BLOQUES

El siguiente anexo es de apoyo para el capítulo 4, donde en la aplicación de SIMULINK se han usado diferentes bloques, estos serán explicados de manera breve y concisa a continuación, para dar un concepto básico de cada uno de ellos.

Bloques Constante (“Constant”)

Gráfico 1 Anexo 2 - Bloque “Constant”

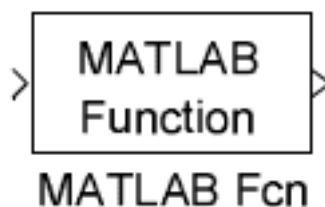


Fuente: Software MATLAB

La Figura muestra la ventana de especificaciones para el bloque “Constant” que se utiliza para entrar un valor constante en el diagrama de bloques que simula la dinámica de un sistema.

Bloque Embedded Fcn MATLAB

Gráfico 2 Anexo 2 - Bloque “MATLAB Fcn”



Fuente: Software MATLAB

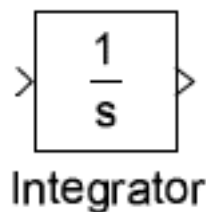
El Bloque ‘MATLAB Fcn’ ejecuta una determinada función MATLAB o expresión de la entrada. Este bloque es más lento que el bloque ‘Fcn’ ya que llama a la función

MatLab para cada paso de integración.

Si se desea implementar una función MATLAB que haya sido previamente creada como se muestra a continuación en el editor de m-function dentro del programa Matlab, function y = ejemplo (u).

Bloque Integrador (“Integrator”)

Gráfico 3 Anexo 2 - Bloque “Integrator”



Fuente: Software MATLAB

El bloque “Integrator” desarrolla la operación de integrar la información de entrada desde un tiempo inicial hasta un tiempo final que se especifica como uno de los parámetros de la simulación. Se observa en la ventana de especificaciones del bloque integrador mostrada en la Figura que se requiere la especificación de la condición inicial de la variable que se suma (integra).

Bloque Clock

Gráfico 4 Anexo 2 - Bloque “Clock”

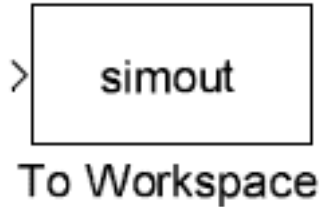


Fuente: Software MATLAB

El bloque “Clock” (Reloj) se utiliza para mostrar el tiempo de simulación. Si se verifica el cuadro “Display time” se despliega el tiempo sobre el icono. El bloque “Display Clock” se puede utilizar como otra opción.

Bloque To Workspace

Gráfico 5 Anexo 2 - Bloque “To Workspace”

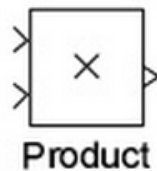


Fuente: Software MATLAB

El bloque ‘To Workspace’ envía su entrada al espacio de trabajo ‘workspace’ de MatLab. Este bloque envía los valores de la entrada a una variable con el nombre especificado en la opción ‘Variable name’. La opción ‘Save format’ determina el formato de la variable de salida.

Bloque Product

Gráfico 6 Anexo 2 - Bloque “Product”



Fuente: Software MATLAB

El bloque “Product” realiza la multiplicación o división de sus entradas. Este bloque calcula la salida multiplicando elemento a elemento o matricialmente, dependiendo del valor del parámetro “Multiplication”. El número de operaciones se configura con el parámetro “Number of inputs”.

ANEXO 3

PROPIEDADES DE MATERIALES

TABLA DE PROPIEDADES DE MATERIALES					
MATERIAL	CONDUCTIVIDAD TÉRMICA (k) (W/m °C)	COEFICIENTE DE DILATACIÓN TÉRMICA (°C ⁻¹)	DENSIDAD (kg/m ³)	VISCOSIDAD (Pa s)	CALOR ESPECÍFICO (J/g °C)
Aluminio	205	2,4 X10 ⁻⁵	2700	-	0,897
Latón	109	1,8 X10 ⁻⁵	8700	-	0,756
Cobre	385	1,7 x 10 ⁻⁵	8890	-	0,385
Plata	406	3,0 X10 ⁻⁵	10500	-	0,237
Acero	50,2	1,2 X10 ⁻⁵	7800	-	0,114
Concreto	0,8	1,2 X10 ⁻⁵	3200	-	0,92
Corcho	0,04	0,04 X10 ⁻⁵	240	-	0.365
Fibra de vidrio	0,04	3,3 X10 ⁻⁶	1190	-	0.684
Vidrio	0,8	0,7 a 0,9 X10 ⁻⁵	1900	-	0,779
Poliuretano	0,024	5,5 X10 ⁻⁵	30 a 50	-	1,88
Forro de madera	0,55	3,0 a 5,6 X10 ⁻⁵	300 a 1100	-	1.02
Agua	0,6	6,9 X10 ⁻⁵	1000	0,001	4,1813